Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa 1.a, zestaw 3

23.10.2006. poniedziałek, godz. 14:15

sala 001B

1. Rozważmy reakcje ropraszania cząstek π na nukleonie:

$$\begin{aligned}\pi^+p &\rightarrow \pi^+p\\ \pi^-p &\rightarrow \pi^-p\\ \pi^-p &\rightarrow \pi^0n\end{aligned}$$

Cząstki π stanowią triplet izospinowy

$$\left|\pi^\pm\right\rangle = |1,\pm1\rangle\,,\ \left|\pi^0\right\rangle = |1,0\rangle$$

natomiast nukleon dublet

$$|p\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\ |n\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Izospin jest liczbą kwantową o własościach teoriogrupowych takich jak moment pędu. Jest on zachowany w oddziaływaniach silnych odpowiedzialnych za podane wyżej reakcje. Rozpraszanie π-nukleon może zachodzić porzez uformowanie stanu pośredniego zwanego rezonansem.

Może to być rezonans Δ:

$$\left|\Delta^{++}\right\rangle = \left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle,\ \left|\Delta^{+}\right\rangle = \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\ \left|\Delta^{0}\right\rangle = \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\ \left|\Delta^{-}\right\rangle = \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

lub rezonans N^*

$$|p^*\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\ |n^*\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Obliczyć stosunki przekrojów czynnych na podane wyżej reakcje przyjmując, że zachodzą one albo poprzez uformowanie rezonansu Δ albo N^*.

WSKAZÓWKA: Mając dany stan początkowy w powyższych reakcjach, zastanowić się, jak wygląda amplituda prawdopodobieństwa otrzymania stanu pośredniego, a następnie otrzymania danego stanu końcowego. Przekrój czynny jest proporcjonalny do kwadratu amplitudy. Odpowiednie współczynniki Clebscha-Gordana odczytać z tablic.

2. System złożony z 2 elektronów związanych w krysztale opisywany jest jedynie przez ich spiny. Hamiltonian oddziaływania ma postać

$$H = -J(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)})$$

gdzie $\sigma_i^{(1,2)}$ są macierzami Pauliego, które związane są z operatorami spinu $\vec{s}^{(1,2)} = \hbar/2\,\vec{\sigma}^{(1,2)}$. Ile poziomów energetycznych ma ten system? Znaleźć odpowiadające im energie i degeneracje.

Opisany wyżej system zostaje umieszczony w polu magnetycznym $\vec{B}$ skierowanym wzdłuż osi z. Hamiltonian oddziaływania ma teraz postać

$$H = -J(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}) - \vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

gdzie moment magnetyczny układu obu elektronów dany jest wzorem

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{mc}\vec{s} = -\frac{e}{mc}(\vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)})$$

gdzie $-e$ i m są odpowiedno ładunkiem i masą elektronu. Jak zmieniają się pozimy energetyczne układu w funkcji B_z?

3. Układ z poprzedniego zestawu opisujący cząstkę o kręcie 1 ma hamiltonian postaci

$$H = A\frac{1}{\hbar}s_z + 2C\frac{1}{\hbar^2}s_x^2.$$

W chwili $t = 0$ cząstka jest w stanie własnym s_z do wartości własnej $+\hbar$. Obliczyć wartość oczekiwaną operatora spinu.

WSKAZÓWKA Układ ma następujące energie własne i odpowiadające im wektory własne:

$$E_0 = 2C, \quad \vec{e}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_\pm = C \pm \omega, \quad \vec{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\omega \mp A)}} \begin{bmatrix} \pm C \\ 0 \\ \omega \mp A \end{bmatrix}$$

(sprawdzić!!!), gdzie $\omega = \sqrt{A^2 + C^2}$. Zależne od czasu równanie Schrödingera ma rozwiązania postaci

$$\psi(t) = \alpha\,\vec{e}_0 \exp(-iE_0 t/\hbar) + \beta\,\vec{e}_+ \exp(-iE_+ t/\hbar) + \gamma\,\vec{e}_- \exp(-iE_- t/\hbar).$$

Stałe α, β i γ należy wyliczyć z warunku początkowego. Średnia wartość spinu wyraża się wzorem

$$\langle s_i \rangle (t) = \psi^*(t)\hat{s}_i\psi(t).$$