Mechanika Kwantowa - kurs duży

kolokwium 3

22.1.2007. poniedziałek, godz. 14:05

sala 001B

1. Cząstka o masie m i o energii $E \to 0$ rozprasza się na potencjale sferycznym w trzech wymiarach
$$V = \begin{cases} -V_0 & \text{dla} \quad 0 \le r \le a \\ \\ 0 & \text{dla} \quad\quad a < r \end{cases},$$
gdzie V_0 jest dodatnią stałą. Wyliczyć dla fali s całkowity przekrój czynny w tej granicy, przyjmując dodatkowo, że
$$mV_0 a^2 \ll \hbar^2.$$
ROZWIĄZANIE: Wewnątrz i na zenątrz potencjału radialne funkcje falowe $u(r) = rR(r)$ dla $l = 0$ mają postać
$$u_I(r) = \sin(k'r),\ u_{II}(r) = A\sin(kr + \delta_0),\ k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)},\ k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}.$$
Zszywając te rozwiąznia dostajemy wzór na δ_0
$$\delta_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{tg} k'a\right) - ka \underset{E\to 0}{\to} ka\left(\frac{\operatorname{tg} k_0 a}{k_0 a} - 1\right),$$
gdzie
$$k_0 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0}$$
W granicy $mV_0a^2 \ll \hbar^2$ czyli $k_0 a \ll 1$ mamy
$$\delta_0 \simeq ka\left(\frac{1}{k_0 a}\left(k_0 a + \frac{1}{3}(k_0 a)^3 + \ldots\right) - 1\right) \simeq ka\frac{(k_0 a)^2}{3}.$$
Stąd przekrój czynny
$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 \simeq 4\pi a^2\left(\frac{\operatorname{tg} k_0 a}{k_0 a} - 1\right)^2 \simeq \frac{4\pi k_0^4 a^6}{9} = \frac{16\pi m^2 V_0^2 a^6}{9\hbar^4}.$$

2. Dla potencjału z zadania 1 wyliczyć różniczkowy przekrój czynny w przybliżeniu Borna. Rozpatrzyć granicę $E \to 0$ i wyliczyć całkowity przekrój czynny w tej granicy. Porównać z wynikiem poprzedniego zadania.

   ROZWIĄZANIE: W przybliżeniu Borna
$$A_{fi} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r\, e^{-i(\vec{k}_f - \vec{k}_i)\vec{r}}V(r)$$

co dla potencjału sferycznie symetrycznego daje po wycałkowaniu po kątach

$$A_{fi} = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty dr\, r^2 \frac{\sin qr}{qr} V(r) = \frac{2mV_0}{q\hbar^2}\int_0^a dr\, r \sin qr,$$

gdzie

$$q = 2k\sin\frac{\theta}{2},\ k = \left|\vec{k}_i\right| = \left|\vec{k}_f\right|.$$

Całkę po dr liczymy przez części:

$$\int_0^a dr\, r\sin qr = \frac{1}{q^2}\int_0^{qa} dr\, x\sin x = \frac{1}{q^2}\left(\sin qa - qa\cos qa\right).$$

Zatem, rozwijając

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots \ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_{fi} &= \frac{2mV_0}{q^3\hbar^2}\left(\sin qa - qa\cos qa\right) \underset{k\to 0}{\longrightarrow} \frac{2mV_0}{q^3\hbar^2}\left(qa - \frac{1}{6}\left(qa\right)^3 - qa + \frac{1}{2}\left(qa\right)^3 + \ldots\right) \\ &= \frac{2mV_0 a^3}{3\hbar^2}. \end{aligned}$$

Różniczkowy przekrój czynny

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|A_{fi}\right|^2 = \frac{4m^2V_0^2}{q^6\hbar^4}\left(\sin qa - qa\cos qa\right)^2 \simeq \frac{4m^2V_0^2a^6}{9\hbar^2}$$

w granicy $k \to 0$ nie zależy od kątów, więc całkowity przekrój czynny ma postać

$$\sigma = \frac{16\pi m^2V_0^2a^6}{9\hbar^2}.$$

Wynik jest identyczny jak w zadaniu 1.

3. Oscylator harmoniczny znajdował się w dalekiej przeszłości w stanie $|m\rangle$. Obliczyć prawdopodobieństwo przejścia w dalekiej przyszłości do sytanu $|n\rangle$ pod wpływem jednorodnego pola siły

$$f(t) = \frac{f_0}{1 + \left(\frac{t}{t_0}\right)^2},$$

gdzie t_0 jest ustalonym parametrem.

ROZWIĄZANIE: Wychodzimy ze wzoru

$$a_{nm} = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\ \langle n\left|V(t)\right| m\rangle\, e^{i\omega_{nm}t},$$

gdzie $\omega_{nm} = \omega_n - \omega_m = \omega(n-m)$ (ω jest częstością oscylatora) oraz

$$V(t) = -xf(t) = -\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\left(a^\dagger + a\right) f(t).$$

Stąd

$$\langle n\left|V(t)\right| m\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} f(t)\left(\sqrt{m+1}\delta_{n,m+1} + \sqrt{m}\delta_{n,m-1}\right).$$

Całkę po dt liczymy metodą residuów zamykając kontur po dużym okręgu w górnej półpłaszczyźnie gdy ω_{nm} jest dodatnie

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f_0}{1+\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} e^{i\omega_{nm}t} = f_0 t_0 \int\limits_C dz \frac{e^{i\omega_{nm}t_0 z}}{(1+iz)(1-iz)} = f_0 t_0 2\pi i \times \left.\frac{e^{i\omega_{nm}t_0 z}}{(1-iz)}\right|_{z=i} = f_0 t_0 \pi e^{-\omega_{nm}t_0},$$

gdzie przyczynek daje biegun w $z = i$ oraz w dolnej półpłaszczyźnie gdy ω_{nm} jest ujemne:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f_0}{1+\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} e^{i\omega_{nm}t} = f_0 t_0 \int\limits_C dz \frac{e^{i\omega_{nm}t_0 z}}{(1+iz)(1-iz)} = -f_0 t_0 2\pi i \times \left.\frac{e^{i\omega_{nm}t_0 z}}{(1+iz)}\right|_{z=-i} = f_0 t_0 \pi e^{\omega_{nm}t_0}$$

gdzie przyczynek daje biegun w $z = -i$. Stąd

$$a_{nm} = i\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega\hbar}}\left(\sqrt{m+1}\delta_{n,m+1} + \sqrt{m}\delta_{n,m-1}\right) e^{-\omega|n-m|t_0}$$

oraz

$$P_{m\to m+1} = \frac{m+1}{2\mu\omega\hbar}\left(\pi f_0 t_0\right)^2 e^{-2\omega t_0},$$
$$P_{m\to m-1} = \frac{m}{2\mu\omega\hbar}\left(\pi f_0 t_0\right)^2 e^{-2\omega t_0}.$$