Mechanika Kwantowa - kurs duży

kolokwium 1a,b – rozwiązania

6.11.2005. poniedziałek, godz. 14:15

sala 001B

1. **a:** Wyliczyć współczynnik Clebscha-Gordana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{array} \right).$$

Rozwiązanie:

$$|22\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle.$$

Działając J_- dostajemy ($J_- \, |j\,m\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,|j\,m-1\rangle$):

$$|21\rangle = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Kombinacja ortogonalna

$$|11\rangle = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle \mp \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle.$$

zgodnie z konwencją

$$\left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1+j_2-n \\ j_1 & j_2-n & j_1+j_2-n \end{array} \right) > 0$$

wybieramy dolny znak:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \end{array} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b: Wyliczyć współczynnik Clebscha-Gordana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{array} \right)$$

Rozwiązanie:

$$\left|\frac{5}{2}\frac{5}{2}\right\rangle = |11\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle.$$

Działając J_- dostajemy ($J_- |j\, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, |j\, m-1\rangle$):

$$\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\,|10\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\,|11\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Kombinacja ortogonalna:

$$\left|\frac{5}{2}\frac{3}{2}\right\rangle = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}\,|10\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle \mp \sqrt{\frac{2}{5}}\,|11\rangle \left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Zgodnie z konwencją wybieramy dolny znak:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right) = -\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

2. Dwa elektrony znajdujące się w krysztale w sąsiednich węzłach sieci krystalicznej (a więc rozróżnialne) oddziaływują momentami magnetycznymi (spin elektronu $s = 1/2$):

   $$\hat{H} = \frac{\gamma}{\hbar^2}\vec{S}^{(1)} \circ \vec{S}^{(2)}.$$

   Znaleźć pozimy energetyczne i degeneracje. Następnie układ umieszczamy w polu magnetycznym $\vec{B} = (0, 0, B)$ skierowanym wzdłuż osi z. pełny hamiltonian opisujący taki system ma teraz postać

   $$\hat{H} = \frac{\gamma}{\hbar^2}\vec{S}^{(1)} \circ \vec{S}^{(2)} + \frac{\beta}{\hbar}\vec{B} \circ \left(\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}\right).$$

   Jak wygląda teraz spektrum układu (wykres) w funkcji B, jak zmieniły się degeneracje?

   Rozwiązanie:

   Mamy:

   $$\vec{S}^2 = \left(\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}\right)^2 = s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{2}\hbar^2 + 2\,\vec{S}^{(1)} \circ \vec{S}^{(2)}$$

   gdzie $s = 0$ lub 1 jest całkowitym spinem. Mamy zatem

   $$E_{s,m} = \frac{\gamma}{2}\left[s(s+1) - \frac{3}{2}\right] = \begin{cases} -\frac{3}{4}\gamma & \text{dla} \quad s = 0, m = 0 \\ \\ +\frac{1}{4}\gamma & \text{dla} \quad s = 0, m = -1, 0, +1 \end{cases}$$

   Włączenie pola magnetycznego rozszczepia poziomy o $m \neq 0$:

   $$E_{s,m}(B) = E_{s,m} + \beta B\, m.$$

3. Cząska bezspinowa opisywana jest funkcją falową

$$\psi(r,\theta,\varphi) = N(x \pm y + 2z)e^{-\alpha r}.$$

Znaleźć średnie $\hat{L}^2$ i $\hat{L}_z$ w tym stanie. Jakie jest prwdopodobieństwo uzyskania w wyniku pomiaru $\hat{L}_z$ wartości $\hbar$,wartości 0.

WSKAZÓWKA: Należy unormować część kątową. Najlepiej zrobić to, rozpisując f. falową na f. kuliste.

Rozwiązanie:

Przepisujemy f. falową jako

$$\begin{aligned}
\psi &= N(\sin\theta\cos\varphi \pm \sin\theta\sin\varphi + 2\cos\theta)re^{-\alpha r} \\
&= N\left(\sin\theta\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \mp i\sin\theta\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2} + 2\cos\theta\right)re^{-\alpha r} \\
&= N\left(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1\mp i}{2}Y_1^1 + \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1\pm i}{2}Y_1^{-1} + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0\right)re^{-\alpha r}.
\end{aligned}$$

Stąd kątowa część

$$\Psi(\theta,\varphi) = N'\left(-\frac{e^{\mp i\pi/4}}{\sqrt{2}}Y_1^1 + \frac{e^{\pm i\pi/4}}{\sqrt{2}}Y_1^{-1} + \sqrt{2}Y_1^0\right).$$

Warunek normalizacyjny

$$1 = \int d\varphi\, d\cos\theta\, \Psi^*\Psi = |N'|^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2\right) = 3\,|N'|^2.$$

Stąd

$$\Psi(\theta,\varphi) = \left(-\frac{e^{\mp i\pi/4}}{\sqrt{6}}Y_1^1 + \frac{e^{\pm i\pi/4}}{\sqrt{6}}Y_1^{-1} + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^0\right).$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{L}^2 \right\rangle &= \int d\varphi\, d\cos\theta\, \Psi^*\hat{L}^2\Psi = 2\hbar, \\
\left\langle \hat{L}_z \right\rangle &= \int d\varphi\, d\cos\theta\, \Psi^*\hat{L}_z\Psi = 0
\end{aligned}$$

oraz

$$P(m=\pm\hbar) = \frac{1}{6},\; P(m=0) = \frac{2}{3}$$

tak, że suma prawdopodobieństw $P(m=\hbar)+P(m=-\hbar)+P(m=0)=1$.