Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 8, grupa 3.a.

19.4.2006. środa, sala 080

Kot Schrödingera

Zasada superpozycji stanów kwantowych mówi, że jeżeli stany $|a\rangle$ oraz $|b\rangle$ są dozwolonymi stanami układu, to ich kombinacja

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle + |b\rangle\right) \tag{1}$$

jest też dozwolonym stanem tego układu. Zasada ta jest kluczowa do wytłumaczenia zjawiska interferencji. Kiedy jednak zastsować ją do wykluczjących się stanów "klasycznych"(np. $|a\rangle = |\text{żywy kot}\rangle$, $|b\rangle = |\text{martwy kot}\rangle$), na pierwszy rzut oka prowadzi do paradoksów. Wyobraźmy sobie, że Agata przygotowała N kopii układu kwantowego w stanie (1) i przeprowadziła na każdym z nich pomiar stwierdzający, czy kot jest żywy, czy martwy. W wyniku otrzymała, że w $\sim 50\%$ przypadków kot był martwy, a w pozostałych $\sim 50\%$ przypadków, że żywy (dlaczego?). Bolek, który jest niedowiarkiem, uważa, że Agata go oszukuje, bo kot nie może być w 50% żywy a w 50% martwy. Bolek twierdzi, że Agata przygotowała $N/2$ stanów z martwym kotem i drugie $N/2$ z żywym, a zatem przygotowała mieszankę statystyczną stanów $|a\rangle$ i $|b\rangle$. Przedmiotem tego zadania, jest najpierw zdefiniowanie wykluczających się stanów "klasycznych", a następnie zaproponowanie pomiaru, który może wykazać, czy rację ma Agata, czy Bolek.

1. Wyliczyć normalizację stanu własnego operatora anihilacji (nazywanego stanem koherentnym lub kwaziklasyczym):

$$\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,. \tag{2}$$

   (Odp. $|z\rangle = \exp(-|z|^2/2)\sum z^n/n!\;|n\rangle$.) Wyliczyć średnie $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w tym stanie i średnie odchylenia kwadratowe. Sprawdzić zasadę nieoznaczoności.

2. Znaleźć jawną postać (nieznormalizowanej) funkci falowej stanu $|z\rangle$ w reprezentacji położeń $\psi_z(x) = \langle x|\, z\rangle$ oraz w przestrzeni pędów $\tilde{\psi}_z(p) = \langle p|\, z\rangle$. Obie te funkcje można znaleźć rozwiązując równania różniczkowe odpowiadające (2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)\psi_z(\xi) &= z\,\psi_z(\xi), \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\pi + \frac{d}{d\pi}\right)\tilde{\psi}_z(\pi) &= z\,\tilde{\psi}_z(\pi), \end{aligned}$$

   gdzie $\pi = p/\sqrt{m\hbar\omega} = -id/d\xi$, $\xi = \sqrt{m\omega/\hbar}x = id/d\pi$.

3. Teraz pokażemy, jak można (przynajmniej teoretycznie) skonstruować stan superpozycji wykluczjących się stanów klasycznych.

   Jak wygląda ewolucja w czasie stanu $|z\rangle$? Proszę wyliczyć z zależnego od czasu równania Schrödingera zależność czasową stanów $|n\rangle$ i podstawić do wzoru na $|z\rangle$ uwzględniając znane wyrażenie na energię stanów własnych oscylatora harmonicznego. Zakładając, że w chwili $t = 0$ układ jest w stanie $z = \rho e^{i\varphi}$ pokazać, że w chwili poźniejszej t układ jest też w stanie kwaziklasycznym

   $$e^{-i\omega t/2}\,|z\,(t)\rangle$$

   gdzie $z(t) = \rho e^{-i(\omega t-\varphi)}$. Wyliczyć średnie $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w tym stanie. Korzystając z zadania 1) wykazać, że dla $\rho \to \infty$ nieoznaczoności są znacznie mniejsze od typowej skali dla wielkości średnich. To jest cecha stanów prawie klasycznych.

4. Konstrukcja stanu "kota Schrödingera".

   W przedziale czasowym $t \in [0, T]$, dodajemy do hamiltonianu oscylatora harmonicznego człon

   $$\hat{W} = g\hbar(\hat{a}^\dagger a)^2. \tag{3}$$

   Stała g jest na tyle duża ($g \gg \omega$, $\omega T \ll 1$), że dla $0 \le t \le T$

   $$\hat{H} = \hat{H}_{\text{osc}} + \hat{W} \simeq \hat{W}. \tag{4}$$

   W chwili $t = 0$ układ jest w stanie $|\psi(0)\rangle = |z\rangle$.

   (a) Wyrazić $|\psi(T)\rangle$ w bazie stanów $|n\rangle$. Skorzystać z faktu, że $(\hat{a}^\dagger a)^2\,|n\rangle = n^2\,|n\rangle$.

   (b) Stan $|\psi(T)\rangle$ znacznie się upraszcza dla $T = 2\pi/g$ lub $T = \pi/g$ (tu $\pi = 3.14...$ a nie π z zad.2)).

   (c) Wybieramy $T = \pi/2g$. Wykazać, że wtedy

   $$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{-i\pi/4}\,|z\rangle + e^{i\pi/4}\,|-z\rangle\right\}. \tag{5}$$

   (d) Załóżmy, że $z = i\rho$. Przedyskutować fizyczną interpretację stanów $|z\rangle$ i $|-z\rangle$. Ile wynoszą średnie położenia i jak skierowane są średnie pędy w tych stanach? Dla $\rho \to \infty$ stany $|z\rangle$ i $|-z\rangle$ są makroskopowo różne, dlatego stan $|\psi(T)\rangle$ można uważać za konkretną realizację "kota Schrödingera".

5. Jak wzglądają (nieznormalizowane) rozkłady prawdodobieństwa położenia i pędu w stanie $|\psi(T)\rangle$? Aby ospowiedzieć na to pytanie wyliczyć $\psi(\xi) = \langle\xi\,|\psi(T)\rangle$ i $\tilde{\psi}(\pi) = \langle\pi\,|\psi(T)\rangle$ posługując się wynikiem zadania 2.) i wyliczyć kwadraty ich modułów. Jak wyglądałyby te rozkłady, gdyby Agata przygotowała $N/2$ stanów $|z\rangle$ i $N/2$ stanów $|-z\rangle$. Powinno się okazać, że pomiar położenia powinien rozstrzygnąć, czy rację ma Agata, czy Bolek. Z jaką dokładnością należałoby wykonać pomiar położenia, aby wynik był rozstrzygający?