Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa 3.a, zestaw 2

1.3.2006. środa, godz. 8:30

sala 001A

1. Dystrybucję delta Diraka można zdefiniować jako granicę ciągu funkcyjnego $f_\varepsilon(x)$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x).$$

Dystrybucja ta ma własność

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(0).$$

Wykazać, że następujące ciągi funkcyjne zdążają w granicy do $\delta(x)$:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},\;\; f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right).$$

Analogicznie wykazać, że

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} dk\, e^{ikx}.$$

We wszystkich przypadkach wykonać wykresy funkcji $f_\varepsilon(x)$ dla kilku wartości ε.

2. Wykazać, że funkcja Θ daje się zapisać jako całka

$$\Theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega+i\varepsilon}e^{-i\omega\tau}.$$

Korzystając z tej reprezentacji całkowej wykazać, że

$$\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau).$$

3. Pokazać, że

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i}\frac{1}{|f'(x_i)|}\,\delta(x_i)$$

gdzie punkty x_i są zerami funkcji $f(x)$. Zastosować powyższe twierdzenie do

$$\delta(x^2-\alpha^2).$$

4. Rozpraszanie Comptona. Zakładając, że foton jest relatywistyczną cząstką o zerowej masie, rozważyć rozpraszanie fotonu o długości fali λ_1 na spoczywającym elektronie o masie m. Przyjmując dla fotonu $E = h\nu = hc/\lambda$ oraz korzystając z prawa zachowania pędu i energii w wersji relatywistycznej, wykazać, że długość fali fotonu λ_2 po rozproszeniu pod kątem θ spełnia związek

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\frac{h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

http://th-www.if.uj.edu.pl/~michal/