Mechanika Kwantowa - kurs duży

kolokwium 1, grupa 3.a.

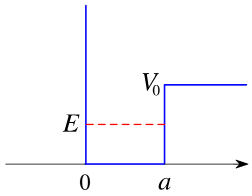
15.3.2006. środa godz 8:30

sala 001A

1. Korzystając z twierdzeń o komutatorach i z relacji komutacji operatorów momentu pędu
$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{L}_k$$
wyliczyć komutator
$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_i\right] =?$$
gdzie $\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2$.
ROZWIĄZANIE: $\hat{L}^2 = \delta_{kn}\hat{L}_k\hat{L}_n$. Stąd
$$\begin{aligned}\left[\hat{L}^2, \hat{L}_i\right] &= \delta_{kn}\left[\hat{L}_k\hat{L}_n, \hat{L}_i\right] = \delta_{kn}\left\{\hat{L}_k\left[\hat{L}_n, \hat{L}_i\right] + \left[\hat{L}_k, \hat{L}_i\right]\hat{L}_n\right\} \\ &= i\hbar\delta_{kn}\left\{\varepsilon_{nij}\hat{L}_k\hat{L}_j + \varepsilon_{kij}\hat{L}_j\hat{L}_n\right\} \\ &= i\hbar\varepsilon_{kij}\left\{\hat{L}_k\hat{L}_j + \hat{L}_j\hat{L}_k\right\} = 0\end{aligned}$$
gdyż wyrażenie w nawiasie $\{\ldots\}$ jest symetryczne w indeksach k, j.

2. Wykazać, że funkcja δ Diraka daje się przedstawić jako granica ciągu funkcyjnego:
$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}e^{-x^2/\varepsilon^2}.$$
ROZWIĄZANIE:
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\frac{1}{\varepsilon}e^{-x^2/\varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(\varepsilon y)e^{-y^2} \\ &= f(0)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} = f(0).\end{aligned}$$

3. Cząstka o masie m porusza się w potencjale $V(x)$
$$V(x) = \begin{cases}\infty & x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le a \\ V_0 & a < x\end{cases}$$
pokazanym na rysunku. Jak należy dobrać iloczyn $V_0 a^2$ aby nie pojawił się ani jeden stan związany.



ROZWIĄZANIE: Wewnątrz studni

$$\psi_I(x) = A\sin kx,\ k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},$$

zaś na zewnątrz dla $x > a$

$$\psi_{II}(x) = Be^{-\varkappa x},\ \varkappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Warunki zszycia w a

$$A\sin ka = Be^{-\varkappa a}, \qquad Ak\cos ka = -B\varkappa e^{-\varkappa a}.$$

Dzieląc stronami i mnożąc przez a dostajemy

$$\varkappa a = -ak\,\cot ka.$$

podstawiając $x = ka > 0$ oraz $y = \varkappa a > 0$ mamy dwa równania

$$y = -x\cot x, \qquad x^2 + y^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}.$$

Nie mają one rozwiązań w pierwszej ćwiartce, jeżeli promień okręgu jest mniejszy od $\pi/2$, co daje warunek

$$\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} < \frac{\pi^2}{4}\ \rightarrow V_0a^2\ < \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}.$$