Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 3

31.10.2005. poniedziałek, godz. 14:15

sala 001B

1. Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny

$$\hat{H}_{osc} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

   został poddany zaburzeniu

$$V(x,y) = \varepsilon \left(\frac{x}{l}\right)\left(\frac{y}{l}\right)$$

   gdzie l jest zdefiniowane jak poprzednio (zad. 1). Wyliczyć poprawkę do energii w pierwszym rzędzie zaburzeń rachunku dla kilku pierwszych poziomów.

   Uwaga: system taki jest zdegenerowany: wyliczyć degenerację poszczególnych poziomów, zastosować wzory dla zdegenerowanego rachunku zaburzeń dla kilku pierwszych poziomów. Wyrazić x i y przez operatory kreacji i anihilacji: $\hat{a}_x$, $\hat{a}_x^\dagger$, $\hat{a}_y$, $\hat{a}_y^\dagger$, które osobno dla x i dla y spełniają standardowe reguły komutacji, natomiast operatory $\hat{a}_x^{(\dagger)}, \hat{a}_y^{(\dagger)}$ komutują między sobą.

2. Na poprzednich ćwiczeniach wykazaliśmy, że znormalizowany stan własny operatora $\hat{a}$ do wartości własnej z, gdzie z jest liczbą zespoloną ma postać

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,.$$

   Wykazać, że mimo iż stany $|z\rangle$ nie są ortogonalne, to stanowią one układ zupełny, tzn. że operator jednostkowy można zapisać jako

$$\mathbf{1} = \frac{1}{\pi}\int d^2z\ |z\rangle\langle z|\,.$$

3. Poziomy Landaua. Rozważyć ruch cząstki naładowanej w stałym polu magnetycznym B skierowanym wzdłuż osi z. W tym celu należy skonstruować hamiltonian korzystając ze znanego uogólnienia z mechaniki klasycznej $\vec{p} \to \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$ i wybrać $\vec{A} = (-Bx, 0, 0)$, a następnie rozwiązać r. Schrödingera (Landau, Lifszic par.112).

4. Rozwiązać poprzednie zadanie wybierając $\vec{A} = \frac{1}{2}(-Bx, By, 0)$.

   Wskazówka: potraktować człon proporcjonalny do B jako zaburzenie i wyrazić go przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji. Znaleźć poprawkę do energii w pierwszym rzędzie dla trzech pierwszych poziomów $n = 0, 1, 2$ i spróbować uogólnić dla dowolnego n.

   http://th-www.if.uj.edu.pl/~michal/