16 Symetrie

16.1 Grupy symetrii

Spróbujmy odpowiedzieć sobie na pytanie, jak zmienia się stan układu kwantowego pod wpływem transformacji układu współrzędnych. Najprostszą taką transformacją jest np. przesunięcie lub obrót układu współrzędnych. Warto od razu zauważyć, że tego typu transformację możemy zinterpretować jako przesunięcie lub obrót samego układu fizycznego. Stąd *bierna* i *aktywna* interpretacja takiej transformacji. Druga uwaga dotyczy matematycznych własności wspomnianych transformacji: otóż zarówno translacje jak i obroty są *grupami symetrii*. Dysponujemy zatem silnym aparatem matematycznym, który można zastosować w mechanice kwantowej.

Przypomnijmy pokrótce definicję grupy. Zbiór obiektów a, b, $c\ldots$ tworzy grupę $\mathcal{G}$, jeżeli można zdefiniować działanie $\circ$ o następujących własnościach:

1. dla każdych $a, b \in \mathcal{G}$ wynik $a \circ b \in \mathcal{G}$,
2. istnieje element $e \in \mathcal{G}$, taki że $a \circ e = e \circ a = a$ (zwany elementem jednostkowym),
3. do każdego elementu a istnieje element odwrotny a^{-1}, taki że $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$,
4. działanie $\circ$ jest łączne: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Dodatkowo jeśli działanie $\circ$ jest przemienne, to mówimy, że grupa $\mathcal{G}$ jest abelowa (przemienna).

Np. Liczby całkowite $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tworzą grupę względem dodawania, a elementem jednostkowym jest tutaj 0. Jest to oczywiście grupa przemienna. Grupy mogą składać się ze skończonej liczby elementów, z przeliczalnej liczby elementów, lub z nieprzeliczalnej liczby elementów. W tym ostatnim przypadku elementy grupy wygodnie jest *oznaczyć* jako funkcje jednego lub kilku ciągłych parametrów.

Łatwo przekonać się, że translacje czy obroty są grupami ciągłymi zależnymi od trzech ciągłych parametrów. W przypadku translacji są to trzy składowe wektora przesunięcia, a w przypadku obrotów trzy kąty. W fizyce często wprowadzamy inną, nieco bardziej formalną grupę, mianowicie grupę *translacji czasowych.*

Na koniec tego krótkiego wstępu warto zaznaczyć, że w fizyce odgrywają rolę nie tylko grupy związane z transformacjami czasu i przestrzeni, ale również grupy transformacji w pewnych *abstrakcyjnych* przetrzeniach. Wrócimy jeszcze do tego problemu w dalszych rozdziałach.

16.2 Grupa translacji

Mówiąc o translacji układu fizycznego mamy na myśli transformację

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}, \tag{16.1}$$

gdzie $\vec{a}$ jest wektorem translacji. Powstaje pytanie, jak zmienia się funkcja falowa układu fizycznego pod wpływem takiego przesunięcia. Jeżeli w przestrzeni nie ma żadnych pól (np. elektomagnetycznych lub grawitacyjnych, które byłyby *na sztywno* związane z jakimś wyróżnionym układem odniesienia) to stan układu kwantowego *zasadniczo* nie powinien ulec zmianie. Oczywiście pakiet falowy o maksimum w punkcie $\vec{r}_0$ zamieni się w pakiet falowy o maksimum w punkcie $\vec{r}_0 + \vec{a}$, ale np. kształt pakietu nie ulegnie zmianie. Czyli jeśli przed przesunięciem układ opisuje funkcja falowa $\psi_\alpha(\vec{r})$, to po przesunięciu opisywany jest on funkcją falową $\psi_\beta(\vec{r} + \vec{a})$. Postulat współzmienniczości względem tanslacji sprowadza się do równania

$$\psi_\beta(\vec{r} + \vec{a}) = \psi_\alpha(\vec{r}) \text{ lub } \psi_\beta(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{a}) \tag{16.2}$$

Aby odpowiedzieć na pytanie, jak ze stanu kwantowego α otrzymać *matematycznie* stan β, zdefiniujmy operator $U(\vec{a})$, taki że

$$\hat{U}(\vec{a})\, \psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\beta(\vec{r}). \tag{16.3}$$

Zauważmy, że równanie (4.3) podaje przepis, jak przejść od jednego stanu do drugiego dla układu w *tym samym punkcie*. Od razu z zachowania normy dostajemy warunek

$$\hat{U}^\dagger(\vec{a})\hat{U}(\vec{a}) = 1, \tag{16.4}$$

czyli że operator U jest *unitarny*.

Aby znaleźć jawną postać operatora U musimy skorzystać z równania (4.2)

$$\hat{U}(\vec{a})\, \psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{a}). \tag{16.5}$$

Warto w tym miejscu zauważyć, że równanie (4.5) stosuje się w zasadzie dla dowolnej transformacji przestrzennej R:

$$\vec{r} \to \vec{r}\,' = R\,\vec{r}, \tag{16.6}$$

wówczas

$$\hat{U}_R\, \psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}). \tag{16.7}$$

Dalej wystarczy założyć, że translacja (4.1) jest *infinitenzymalna*, tzn. że $\vec{a}$ jest małe i

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{a}) = \psi_\alpha(\vec{r}) - \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\, \psi_\alpha(\vec{r}) + \frac{1}{2}\left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)^2 \psi_\alpha(\vec{r}) + \ldots, \tag{16.8}$$

a stąd

$$\hat{U}(\vec{a}) = 1 - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} + \frac{1}{2}\left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right) + \ldots = e^{-\vec{a}\cdot\vec{\nabla}}. \tag{16.9}$$

Na koniec warto przepisać (4.9) przy pomocy operatora pędu

$$\hat{U}(\vec{a}) = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{p}/\hbar} = e^{-i(a_x\hat{p}_x + a_y\hat{p}_y + a_z\hat{p}_z)/\hbar}. \tag{16.10}$$

Widzimy, że operatory $\hat{U}(\vec{a})$ tworzą grupę abelową w sensie definicji podanej na początku rozdziału, a poszczególne elementy tej grupy numerowane są trzema ciągłymi parametrami a_x, a_y i a_z. Elementem jednostkowym jest

$$\hat{U}(0) = 1,$$

a elementem odwrotnym

$$\hat{U}^{-1}(\vec{a}) = \hat{U}(-\vec{a}) = e^{i\vec{a}\cdot\vec{p}/\hbar}.$$

Operator $\hat{U}$ przyjmuje postać (4.10) niezależnie od reprezentacji jaką wybierzemy dla operatora $\vec{p}$. Operator pędu nazywamy w tym kontekście *generatorem* grupy.

16.2.1 Równanie ruchu

Czy z faktu, że $\psi_\alpha(t,\vec{r})$ spełnia zależne od czasu równanie Schrödingera

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi_\alpha(t,\vec{r}) = \hat{H}\,\psi_\alpha(t,\vec{r}) \tag{16.11}$$

wynika, że $\psi_\beta(t,\vec{r})$ jest także rozwiązaniem zależnego od czasu równania Schrödingera? Sprawdźmy

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d}{dt}\psi_\beta(t,\vec{r}) &= i\hbar\frac{d}{dt}\left(\hat{U}_R\,\psi_\alpha(t,\vec{r})\right) \\
&= \hat{U}_R\left(i\hbar\frac{d}{dt}\psi_\alpha(t,\vec{r})\right) \\
&= \hat{U}_R\hat{H}\,\psi_\alpha(t,\vec{r}) \\
&= \hat{U}_R\hat{H}\,\hat{U}_R^\dagger\psi_\beta(t,\vec{r}),
\end{aligned} \tag{16.12}$$

gdzie w ostatnim kroku skorzystaliśmy z unitarności operatora $\hat{U}_R$ i równania (4.7). Równanie to przyjmuje postać (4.12) gdy

$$\hat{U}_R\hat{H}\,\hat{U}_R^\dagger = \hat{H}, \qquad \text{czyli} \qquad \left[\hat{U}_R, \hat{H}\right] = 0. \tag{16.13}$$

Stosując równanie (4.13) do transformacji symetrii, otrzymujemy, że musi zachodzić

$$\left[\hat{p}, \hat{H}\right] = 0. \tag{16.14}$$

Aby wykazać (4.14) wystarczy rozwinąć $\hat{U}$ według (4.9). A zatem, aby układ fizyczny po przesunięciu nadal pozostawał układem fizycznym (czyli spełniał równanie Schrödingera), operator pędu (czyli generator symetrii) i hamilatonian układu muszą komutować (czyli posiadać wspólny układ funkcji własnych). O takim układzie mówimy, że jest *niezmienniczy* względem translacji.

16.2.2 Elementy macierzowe stanów przesuniętych

Dotychczas nasze wywody prowadziliśmy w oparciu o funkcje falowe w przedstawieniu położeniowym. Jednakże równanie (4.3) można z łatwością przepisać w notacji *bra* i *ket* Diraka:

$$|\beta\rangle = \hat{U}_R\;|\alpha\rangle\,. \tag{16.15}$$

Podobnie dla stanu sprzężonego

$$\langle\beta'| = \langle\alpha'|\;\hat{U}_R^{\dagger}. \tag{16.16}$$

Wykorzystując równania (4.15) i (4.16) zapiszmy element macierzowy dowolnego operatora dynamicznego w układzie przetransformowanym:

$$\langle\beta'|\;\hat{O}_R\;|\beta\rangle = \langle\alpha'|\;\hat{U}_R^{\dagger}\hat{O}_R\hat{U}_R\;|\alpha\rangle = \langle\alpha'|\;\hat{O}\;|\alpha\rangle\,. \tag{16.17}$$

Widzimy zatem, że operator w układzie wyjściowym wyraża się przez operator w układzie przetransformowanym

$$\hat{O} = \hat{U}_R^{\dagger}\hat{O}_R\hat{U}_R. \tag{16.18}$$

Wróćmy do translacji. Intuicyjnie, współrzędna r_k w układzie przesuniętym o $\vec{a}$, z punktu widzenia układu wyjściwego ma wrtość $r_k + a_k$. Sprawdźmy, jak wygląda to w naszym formaliźmie. Przyjmując, że $\hat{O}_R = \hat{r}_k$, mamy

$$\begin{aligned}\hat{O} &= \left(1+\frac{i}{\hbar}a_i\hat{p}_i+\ldots\right)\hat{r}_k\left(1-\frac{i}{\hbar}a_i\hat{p}_i+\ldots\right)\\ &= \hat{r}_k+\frac{i}{\hbar}a_i\;[\hat{p}_i,\hat{r}_k] = r_k+\frac{i}{\hbar}a_i\;(-i\hbar\delta_{ik})\\ &= r_k+a_k.\end{aligned} \tag{16.19}$$

Z kolei, jeśli $\hat{O}_R = \hat{p}$, to operator $\hat{O} = \hat{p}$. Podobnie jest dla każdego operatora, który jest funkcją $\hat{p}$.

16.3 Translacje w czasie

Rozpatrzmy teraz analogicznie transformację polegającą na *translacji czasowej.* Wówczas

$$\psi_\beta(t+\tau,\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}) \text{ lub } \psi_\beta(t,\vec{r}) = \psi_\alpha(t-\tau,\vec{r}). \tag{16.20}$$

Korzystajc z analogonu wzoru (4.7)

$$\hat{U}_T(\tau)\,\psi_\alpha(t,\vec{r}) = \psi_\alpha(t-\tau,\vec{r}) \tag{16.21}$$

i stosując rozwinięcie Taylora

$$\psi_\alpha(t-\tau,\vec{r}) = \left(1-\tau\frac{d}{dt}+\frac{\tau^2}{2!}\frac{d^2}{dt^2}+\ldots\right)\psi_\alpha(t,\vec{r}) = e^{-\tau\frac{d}{dt}}\psi_\alpha(t,\vec{r}). \tag{16.22}$$

Stąd

$$\hat{U}_T(\tau) = e^{i\tau\hat{H}/\hbar} \tag{16.23}$$

pod warunkiem, że $\hat{H}$ nie zależy od czasu. Tylko wtedy wyższe pochodne d^n/dt^n dają się zastąpić przez $\hat{H}^n$. Oczywiście $\hat{U}_T$ komutuje z $\hat{H}$ i układ posiada symetrię niezmienniczości translacyjnej w czasie.

16.4 Grupa obrotów

16.4.1 Generatory grupy obrotów

Aby znaleźć formę operatora $\hat{U}_R$ dla obrotów musimy najpierw skonstruować przekształcenie przestrzenne odpowiadające obrotowi wektora $\vec{r}$. Każdy obrót R można przedstawić jako złożenie trzech obrotów kolejno wokó osi z, x i y[1]:

$$R = R_y(\phi_y)R_x(\phi_x)R_z(\phi_z), \tag{16.24}$$

gdzie $\phi_{x,y,z}$ są kątami obrotu wokó odpowiednich osi. Warto zaznaczyć, że istotną rolę odgrywa tu *kolejność* obrotów, gdyż nie są to operacje przemienne. Za dodatni kierunek obrotu przyjmijmy kierunek przeciwny ruchowi wskazówek zegara, wówczas obrót o kąt ϕ_z daje się zapisać za pomocą przekształcenia macierzowego

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_z & -\sin\phi_z & 0 \\ \sin\phi_z & \cos\phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{16.25}$$

Rzeczywicie dla wektora $\vec{r} = (x, 0, 0)$ leżącego na osi x po obrocie $\vec{r}' = (x\cos\phi_z, x\sin\phi_z, 0)$, a więc współrzędna x zmalała a y wzrosła.

Obrót wokó osi x o kąt ϕ_x przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_x & -\sin\phi_x \\ 0 & \sin\phi_x & \cos\phi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{16.26}$$

natomiast obrót wokó osi y o kąt $\phi_y$daje się zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_y & 0 & \sin\phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi_y & & \cos\phi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{16.27}$$

Zwróćmy uwagę, że znak „$-$” dla obrotu wokó osi y pojawia się w dolnym rogu macierzy R_y, a nie jak w przypadku obrotów wokó osi z i x ponad diagonalną ze względu na to, że przyjęliśmy, że obroty wykonywane są przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Ponieważ, aby wyliczyć postać operatora $\hat{U}_R$ będziemy korzystali z rozwinięcia Taylora, wystarczy rozważyć obroty *infinitenzymalne*:

$$\begin{aligned} R_z &= 1 + \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & 0 \\ \phi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots, \\ R_x &= 1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_x \\ 0 & \phi_x & 0 \end{bmatrix} + \ldots, \\ R_y &= 1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \phi_y \\ 0 & 0 & 0 \\ -\phi_y & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots. \end{aligned} \tag{16.28}$$

[1] Nie jest to jedyna możliwość, wrócimy do tego problemu w rozdziale ??.

Pełna macierz R jest iloczynem macierzy (4.28). W przypadku obrotów infinitenzymalnych nie gra roli kolejność, gdyż różnica między dwoma obrotami wykonanymi w różnej kolejności jest wyższego rzędu w kątach ϕ. Zatem

$$R = 1 + \begin{bmatrix} 0 & -\phi_z & \phi_y \\ \phi_z & 0 & -\phi_x \\ -\phi_y & \phi_x & 0 \end{bmatrix} + \dots . \tag{16.29}$$

Stąd

$$\vec{r}' = R\,\vec{r} = \vec{r} + \begin{bmatrix} \phi_y z - \phi_z y \\ \phi_z x - \phi_x z \\ \phi_x y - \phi_y x \end{bmatrix} + \dots = \vec{r} + \vec{\phi} \times \vec{r} + \dots , \tag{16.30}$$

gdzie wektor $\vec{\phi}$ jest zdefiniowany jako:

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} . \tag{16.31}$$

Skorzystamy teraz z równania (4.7):

$$\hat{U}_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(R^{-1}\vec{r}),$$

gdzie R^{-1}otrzymuje się z R przez zamianę $\vec{\phi} \to -\vec{\phi}$ we wzorze (4.30):

$$\begin{aligned} \hat{U}_R(\vec{\phi})\psi_\alpha(\vec{r}) &= \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi} \times \vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r}) - \left(\vec{\phi} \times \vec{r}\right) \cdot \vec{\nabla}\psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left\{1 - \vec{\phi} \cdot \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right)\right\} \psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left\{1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi} \cdot (\vec{r} \times \vec{p})\right\} \psi_\alpha(\vec{r}) \\ &= \left\{1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi} \cdot \vec{L}\right\} \psi_\alpha(\vec{r}). \end{aligned} \tag{16.32}$$

Po eksponencjacji otrzymujemy jawną postać operatora $\hat{U}_R$:

$$\hat{U}_R\left(\vec{\phi}\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\vec{L}}. \tag{16.33}$$

Widzimy zatem, że trzy składowe operatora momentu pędu stanowią generatory transformacji obrotu. Jak wiemy spełniają one relację komutacji

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_k\right] = i\hbar\, \epsilon_{ijk}\hat{L}_k.$$

Warto spróbować relację (4.30) definiującą obrót w przestrzeni położeń przepisać w postaci analogicznej do (4.32,4.33). W tym celu przepiszmy ją dla składowej k wektora $\vec{r}'$

$$r'_k = r_k + \left(\vec{\phi} \times \vec{r}\right)\Big|_k = r_k + \epsilon_{klm}\phi_l r_m = \left(\delta_{km} - \phi_l \epsilon_{lkm}\right) r_m. \tag{16.34}$$

Zdefiniujmy teraz trzy macierze ($l = 1, 2, 3$) o wymiarach 3×3:

$$s^l_{km} = -\epsilon_{lkm}, \tag{16.35}$$

które przyjmują jawną postać

$$s^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; s^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; s^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{16.36}$$

Przy pomocy tych macierzy możemy zapisać macierz R jako

$$R = 1 + \phi^1 s^1 + \phi^2 s^2 + \phi^3 s^3 = 1 + \vec{\phi} \cdot \vec{s}. \tag{16.37}$$

Nawiasem mówiąc, ten związek możny już było odczytać ze wzoru (4.28).Definiując nowe macierze S_l:

$$S_l = i\hbar s^l \tag{16.38}$$

możemy przepisać R w postaci analogicznej do $\hat{U}_R$:

$$R = 1 - \frac{i}{\hbar} \vec{\phi} \cdot \vec{S}. \tag{16.39}$$

Widzimy zatem, że macierze

$$(S_l)_{km} = -i\hbar \, \epsilon_{lkm} \tag{16.40}$$

są generatorami obrotów w przestrzeni położeń.

Spróbujmy podsumować dotychczasowe wyniki. Po pierwsze pokazaliśmy, że generatorami grupy obrotów są składowe operatora momentu pędu. Za ich pomocą można zapisać operator obrotu $\hat{U}_R$ działający w przestrzeni funkcji falowych. Z poprzednich rozważań wiemy, że przestrzeń, w której działają te operatory daje się scharakteryzować dwoma liczbami kwantowymi l i m. Dla wybranego, *ustalonego* l operatory te możemy zastąpić przez macierze o wymiarach $(2l + 1) \times (2l + 1)$. Po drugie, okazało się, że zwykłą transformację obrotu w przestrzeni położeń możemy zapisać przy pomocy generatorów S_l, które są macierzami 3×3. Stąd wniosek, że dla tej reprezentacji grupy obrotów $l = 1$. Warto się przekonać, że

$$\sum_{l=1}^{3} (S_l)^2 = 2\hbar^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{16.41}$$

Ponieważ wartość własna operatora $\hat{L}^2$ wynosi $l(l + 1)$, we wzorze (4.41) $l = 1$.

Dotychczas zakładaliśmy milcząco, że funkcje falowe ψ_α są *skalarami* względem transformacji obrotu. Ale można sobie łatwo wyobrazić funkcję falową, która sama jest trójwymiarowym wektorem

$$\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \psi^1_\alpha(\vec{r}) \\ \psi^2_\alpha(\vec{r}) \\ \psi^2_\alpha(\vec{r}) \end{bmatrix}. \tag{16.42}$$

Wówczas prawo transformacji przybiera postać

$$\vec{\psi}_\beta(R\vec{r}) = R\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}). \tag{16.43}$$

Macierz R działa tylko na wskaźniki wektorowe funkcji falowej, a nie na indeksy α, β. Stąd operator $\hat{U}_R$ spełnia równanie

$$\hat{U}_R\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) = \psi_\beta(\vec{r}) = R\vec{\psi}_\alpha(R^{-1}\vec{r}). \tag{16.44}$$

Dla obrotów infinitenzymalnych

$$\begin{aligned}
\hat{U}_R\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) &= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r} - \vec{\phi}\times\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}\right)\left(1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}) \\
&= \left(1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S} - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}\right)\vec{\psi}_\alpha(\vec{r}).
\end{aligned} \tag{16.45}$$

Pamiętajmy, że $\vec{S}$ działają na indeksy wektorowe funkcji $\vec{\psi}_\alpha(\vec{r})$, a $\vec{L}$ są operatorami różniczkowymi. Zatem

$$\hat{U}_R\left(\vec{\phi}\right) = 1 - \frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\left(\vec{S} + \hat{L}\right) + \dots \tag{16.46}$$

czyli że generatory obrotów są sumą generatora $\vec{L}$ i generatora $\vec{S}$.