16 Rozpraszanie w jednym wymiarze

W nierelatywistycznej mechanice kwantowej rozpraszanie rozumiemy jako proces zmiany funkcji falowej opisującej rozpraszany obiekt przy przejściu przez obszar działania znanego potencjału. W rzeczywistości źródłem potencjału jest inny obiekt, np. jądro atomowe w tzw. tarczy. Pełny opis uwzględniający ten fakt możliwy jest dopiero w relatywistycznej mechanice kwantowej.

Choć na pierwszy rzut oka wydaje się, że rozpraszanie cząstki na pewnym potencjale powinno być opisywane przy pomocy równania Schrödingera zależnego od czasu, to w praktyce stosuje się równoważny opis stacjonarny. Odpowiada to założeniu, że z nieskończoności nadbiega na zlokalizoawny potencjał ciągły strumień cząstek. W przypadku jednowymiarowym cząstki te z pewnym prawdopodobieństwem odbijają się od potencjału oraz przechodzą „na drugą" stronę. Mamy więc do czynienia jeszcze z dwoma strumieniami: odbitym i przechodzącym. Zakładając, że potencjał jest zlokalizowany wokół $x = 0$ funkcje falowe dla $x \ll 0$ lub $x \gg 0$ opisywane są przez fale płaskie. Funkcja falowa cząstki padającej (z lewa na prawo)

$$\Psi_p(x) = A\, e^{-iEt/\hbar} e^{+ikx} \text{ dla } x \ll 0 \tag{16.1}$$

Funkcja falowa stanu końcowego: odbicie i przejście przez potencjał

$$\begin{aligned} \Psi_k(x) &= B\, e^{-iEt/\hbar} e^{-ikx} \text{ dla } x \ll 0 \\ &+ C\, e^{-iEt/\hbar} e^{+ikx} \text{ dla } x \gg 0. \end{aligned} \tag{16.2}$$

W podejściu stacjonarnym musimy zatem rozwiązać równanie Schrödingera z warunkami brzegowymi

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A\, e^{+ikx} + B\, e^{-ikx} \text{ dla } x \ll 0 \\ \psi(x) &= C\, e^{+ikx} \text{ dla } x \gg 0. \end{aligned} \tag{16.3}$$

Zauważmy, że energia jest tu zachowana, nie zostaje ona przekazana „tarczy", stąd to samo k we wszystich kawałkach funkcji falowej.

Warunki (16.3) potraktujemy jako warunki brzegowe dla równania Schrödingera opisujące cząstkę o masie m o dodatniej energii

$$E = \frac{k^2}{2m\hbar^2}, \tag{16.4}$$

które wygodnie zapisać w postaci (w dowolnej liczbie wymiarów):

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) \psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}). \tag{16.5}$$

Sens fizyczny współczynników A, B i C można odczytać rozważając gęstość prądu $S(x)$ z równania ciągłości

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{16.6}$$

$$S(x) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} - \psi(x)\frac{\partial\psi^*(x)}{\partial x}\right) \tag{16.7}$$

dla $x \ll 0$

$$S(x) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(|A|^2 ik - |B|^2 ik\right) = \frac{p}{2m}\left(|A|^2 - |B|^2\right) = v\left(|A|^2 - |B|^2\right) \tag{16.8}$$

i dla $x \gg 0$

$$S(x) = v\,|C|^2, \tag{16.9}$$

gdzie v jest prędkością cząstki. Interpretacji poddają się jedynie stosunki

$$\left|\frac{B}{A}\right|^2, \left|\frac{C}{A}\right|^2 \tag{16.10}$$

wsp. odbicia i przejścia, dlatego absolutna normalizacja jest nieistotna. Wygodna „norma" $A = 1/\sqrt{v}$, wówczas padający strumień wynosi 1.

Przejście nad potencjałem i tunelowanie.