4 Równanie Schrödingera

Aby poprawnie matematycznie zapisać sumę występującą w definicji propagatora K

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_{\substack{\text{trajektorie} \\ \text{od } x_a \text{ do } x_b}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_a \to x_b]}. \tag{4.1}$$

podzielmy odcinek czasowy $T = t_b - t_a$ na N odcinków o długości ε każdy:

$$t_0 = t_a,\ t_1 = t_0 + \varepsilon, \ldots, t_{N-1} = t_0 + (N-1)\varepsilon,\ t_N = t_b = t_0 + N\varepsilon.$$

Wówczas

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N\varepsilon = \text{const}}} \left(\frac{1}{A}\right)^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_a \to x_b]}, \tag{4.2}$$

gdzie A jest czynnikiem normalizacyjnym. Warto teraz rozpisać całkę definiującą działanie

$$\begin{aligned} S[x] &= \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x, t)\, dt \\ &= \sum_{k=1}^{N} L\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}, \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right)\varepsilon. \end{aligned}$$

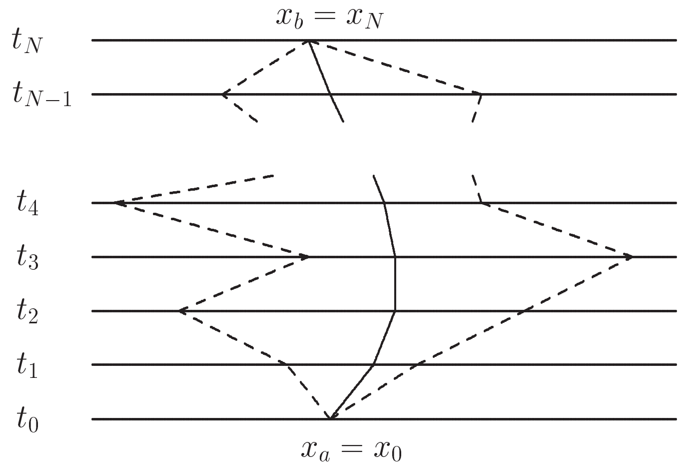
Oznaczając

$$L\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}, \frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = L_{k-1,k}$$

można przepisać propagtor (4.2) jako

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ N\varepsilon = \text{const}}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} L_{0,1}} dx_1 \frac{1}{A} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} L_{1,2}} dx_2 \ldots \\ \ldots \frac{1}{A} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} L_{N-2,N-1}} dx_{N-1} \frac{1}{A} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} L_{N-1,N}}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Powstaje pytanie, czy wyrażenie (4.3) ma sens z matematycznego punktu widzenia i ile wynosi czynnik normalizacyjny A. Ściśle rzecz biorąc całki po dx_k daje się dobrze określić tylko w *przestrzeni euklidesowej*, tzn. dla *urojonego* czasu $t \to i\tau$. Nie wchodząc w szczegóły, pokażemy teraz, jak w podejściu sum po trajektoriach można otrzymać równynie Schrödingera.



4.0.1 Równanie Schrödingera

Rozpatrzmy ewolucję funkcji falowej o jeden „krok" czasowy ε

$$K(x, t+\varepsilon; y, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{A} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} L_{0,1}},$$

gdzie

$$L_{0,1} = \frac{m}{2} \frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2} - V(\frac{x+y}{2}).$$

Zgodnie z (**??**) funkcja falowa w chwili końcowej przyjmuje postać

$$\psi(x, t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{A} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar} \frac{(x-y)^2}{\varepsilon}\right\} \exp\left\{\frac{\varepsilon}{i\hbar} V(\frac{x+y}{2})\right\} \psi(y, t). \quad (4.4)$$

Rozwiniemy lewą i prawą stronę (4.4) z dokładnością do wyrazów rzędu ε. Rozwinięcie lewej strony nie przedstawia problemu

$$\psi(x, t+\varepsilon) = \psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t)\,. \quad (4.5)$$

Aby rozwinąć prawą stronę wprowadźmy nową zmienną $y = x - \eta$ i zmieńmy zmienne całkowania

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{A} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar} \frac{\eta^2}{\varepsilon}\right\} \exp\left\{\frac{\varepsilon}{i\hbar} V(x - \frac{\eta}{2})\right\} \psi(x-\eta, t). \quad (4.6)$$

Pierwszy czynnik w całce (4.6) przypomina czynnik gaussowski o szerokości proporcjonalnej do $\sqrt{\varepsilon}$. Zatem pozostałe czynniki możemy rozwinąć w szereg potęgowy w η, gdyż przyczynki od dużych η będą tłumione przez czynnik gaussowski. Ponieważ całość chcemy rozwinąć z dokładnością do ε, w szeregu w η będziemy potrzebować wyrazy liniowe i kwadratowe. Z kolei V jest już mnożone przez ε, wystarczy więc przyjąć $V(x-\eta/2) = V(x)$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{A} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar}\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right\} \left[1 - \frac{\varepsilon}{i\hbar}V(x)\right] \left[\psi(x,t) - \eta\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t) + \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t)\right].$$

Ponieważ całka gaussowska z η znika, dostajemy tylko trzy człony

$$\begin{aligned} &\psi(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{A} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar}\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right\} \\ &+ \frac{\varepsilon}{i\hbar}V(x)\psi(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{A} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar}\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right\} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{A} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar}\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right\}\eta^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Pierwszy człon jest rzędu ε^0 i powinien odtworzyć $\psi(x,t)$ z równania (4.5). Warunek ten pozwala nam na wyliczenie stałej A:

$$A = \sqrt{i\frac{2\pi\hbar\varepsilon}{m}}.$$

Stąd druga całka w (4.7) jest równa 1, a trzecia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{A} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar}\frac{\eta^2}{\varepsilon}\right\}\eta^2 = i\frac{\hbar\varepsilon}{m}.$$

Widzimy, że rzeczywiście człony kwadratowe w η po wycałkowaniu dają człony liniowe w ε. Porównując (4.5) i (4.7) otrzymujemy

$$\psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = \psi(x,t) + \varepsilon\left\{-\frac{i}{\hbar}V(x) + i\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\psi(x,t).$$

Wyrazy rzędu ε po pomnożeniu przez $i\hbar$ dają zależne od czasu równanie Schrödingera:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right\}\psi(x,t). \tag{4.8}$$

4.0.2 Operatory

Równanie Schrödingera opisuje ewolucję funkcji falowej w czasie. Wyrażenie po prawej stronie ma sens operatora energii (hamiltonianu)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x). \tag{4.9}$$

Rzeczywiście, jeśli przyjąć, że operator pędu ma postać

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{4.10}$$

to

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x). \tag{4.11}$$

W tym przedstawieniu operatorowi położenia odpowiada $\hat{x} = x$.

W mechanice kwantowej mierzalnym wielkościom fizycznym (obserwable) odpowiadają operatory działające w przestrzeni funkcji falowych. Wartości własne tych operatorów wyznaczają możliwe wyniki pomiarów danej wielkości, a odpowiadające im funkcje falowe wyznaczają prawdopodobieństwa znalezienia cząstki o danej wrtości własnej. Własnościami operatorów zajmiemy się bliżej w jedny z następnych rozdziałów.

4.1 Separacja zmiennych

Zależne od czasu równanie Schrodingera

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\vec{r},t) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right\}\psi(\vec{r},t) \tag{4.12}$$

daje się dla potencjałów niezależnych od czasu *rozseparować* na dwa równania. Rzeczywiście, przyjmując, że:

$$\psi(\vec{r},t) = A(t)u(\vec{r}) \tag{4.13}$$

otrzymujemy

$$i\hbar\frac{1}{A(t)}\frac{\partial A}{\partial t}(t) = \frac{1}{u(\vec{r})}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right\}u(\vec{r}). \tag{4.14}$$

Ponieważ prawa strona tego równania jest tylko funkcją czasu, a lewa funkcją tylko położenia, więc równość może zachodzić tylko wtedy, gdy są one obie równe stałej, którą nazwiemy E. Wówczas (4.14) *rozseparowuje się* na dwa równania

$$i\hbar\frac{\partial A}{\partial t}(t) = E\,A(t),$$
$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right\} u(\vec{r}) = E\,u(\vec{r}). \tag{4.15}$$

Drugie z tych równań nosi nazwę *niezależnego od czasu równania Schrodingera.* Jego rozwiązania zależą od formy potencjału i w gruncie rzeczy niniejszy wykład w dużej mierze poświęcony będzie właśnie zagadnieniu poszukiwania rowiązań równania (4.15). Pierwsze równanie daje się łatwo rozwiązać

$$A(t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}}. \tag{4.16}$$

Stała E ma wymiar energii i, jak się wkrótce okaże, ma sens całkowitej energii układu fizycznego.

Pełne rozwiązanie równania Schrödingera przyjmuje zatem postać

$$\psi_E(\vec{r},t) = \mathcal{N}\,e^{-i\frac{Et}{\hbar}}u_E(\vec{r}), \tag{4.17}$$

gdzie $\mathcal{N}$ jest stałą normalizacyjną. Funkcja u_E jest rozwiązaniem niezależnego od czasu równania Schrödingera o energii E . Wygodnie wprowadzić jest częstość kołową $\omega = E/\hbar$.

4.2 Fala płaska

Rozważmy na początek najprostszy przypadek, mianowicie ruch cząstki swobodnej $V \equiv 0$. Wówczas

$$u_E(\vec{r}) = e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad \text{gdzie} \quad E = \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2m}. \tag{4.18}$$

Działając na u_E operatorem pędu (4.10) uogólnionym na przypadek trójwymarowy: $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$

$$-i\hbar\vec{\nabla}u_E(\vec{r}) = \mp\hbar\vec{k}. \tag{4.19}$$

Ponieważ moduł z $\hbar\vec{k}$ odpowiada klasycznemu pędowi $\sqrt{2mE}$ cząstki swobodnej, mamy następujące związki

$$\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \quad \text{a} \quad E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = \frac{\hbar^2\vec{k}^{\,2}}{2m}. \tag{4.20}$$

Niestety (4.18) nie daje się znormalizować ponieważ $u^*u = 1$ i całka po dV jest rozbieżna. Faktycznie fala płaska jest pewną idealizacją. Drgania funkcji u zachodzą równocześnie w całej przestrzeni z tą samą amplitudą, w tej sytuacji trudno mówić o zlokalizowanym obiekcie, który fala płaska mogłaby opisywać.

Dwa możliwe znaki przy wektorze falowym $\vec{k}$ odpowiadają różnym kierunkom rozchodzenia się fali płaskiej. Jeśli popatrzeć na pełne, zależne od czasu rozwiązanie (4.17)

$$\psi_E(\vec{r}, t) = e^{-i(\omega t \mp \vec{k} \cdot \vec{r})} \tag{4.21}$$

to widać, że równanie stałej fazy implikuje, że dla rozwiązania z górnym znakiem (+ w równaniu (4.18)) $\vec{r}$ *rośnie* wraz ze wzrostem t (ruch w prawo), natomiast dla rozwiązania ze znakiem dolnym ($-$ w równaniu (4.18)) $\vec{r}$ *maleje* wraz ze wzrostem t (ruch w lewo).

4.3 Pakiety falowe

Aby otrzymać obiekt zlokalizowany musimy utworzyć *superpozycję* fal płaskich o różnych k. Rozpatrzmy część przestrzenną jednowymiarowej fali płaskiej

$$u_k(x) = e^{i\,kx}.$$

To właśnie z całkowania po $dV = dx\,dy\,dz$ bierze się cały problem, więc czasowy czynnik fazowy jest nieistotny dla dalszej dyskusji. Rozważmy teraz funkcję $\psi(x)$ zdefiniowaną jako

$$\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\psi}(k)\, u_k(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\psi}(k)\, e^{i\,kx}, \tag{4.22}$$

gdzie $\tilde{\psi}(k)$ jest pewną zlokalizowaną funkcją k. Czynnik $\sqrt{2\pi}$ w całce (4.22) przyjęliśmy aby być w zgodzie z pewnymi konwencjami, równie dobrze moglibyśmy go włączyć do definicji funkcji $\tilde{\psi}(k)$. Równanie (4.22) znane jest w matematyce jak *transformata Fouriera.* Rzeczywiście, całka (4.22) jest przepisem przyporządkowującym funkcji zmiennej k funkcję zmiennej x.

Zauważmy, że porzez wzór (4.22) faktycznie *zdefiniowaliśmy* funkcję $\tilde{\psi}(k)$, która niesie tę samą informację fizyczną co funkcja $\psi(x)$. Mówimy, że funkcje $\tilde{\psi}(k)$ i $\psi(x)$ są różnymi *przedstawieniami* stanu układu. Zależnie od konkretnego problemu czasem wygodniej użyć funkcji falowej w *reprezentacji* położeń albo w *reprezentacji* k (zwanej reprezentacją pędu, ze względu na związek $k = p/\hbar$).

Pokażemy teraz, że jeśli $\tilde{\psi}(k)$ jest unormowana, to także $\psi(x)$ ma normę równą 1. Rozważmy normę

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\, \psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\psi}^*(k')\, e^{-i\,k' x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\psi}(k)\, e^{i\,kx}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\psi}^*(k') \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\psi}(k) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{i\,(k-k')x}. \qquad (4.23)$$

Spróbujmy wyliczyć ostatnią całkę po dx. Na pierwszy rzut oka całka ta wydaje się źle określona. Rzeczywiście, dla $k = k'$ jest ona nieskończona, natomiast dla $k \neq k'$ całka ta jest równa zero, ponieważ w garnicy nieskończonego przedziału całkowania oscylacje exponenty znoszą się do zera.

Korzystając z wyników przedstawionych w dodatku na końcu tego rozdziału mamy

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{i\,(k-k')x} = 2\pi\, \delta(k-k'). \qquad (4.24)$$

Warto spojrzeć na równanie (4.24) jako na warunek „normalizacyjny" dla fal płaskich:

$$(u_{k'}, u_k) = 2\pi\, \delta(k-k').$$

Podstawiając (4.24) do równania (4.23) otrzymujemy

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\, \psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\psi}^*(k') \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, \tilde{\psi}(k)\, 2\pi\, \delta(k-k').$$

Możemy teraz łatwo wykonać całkę po np. dk':

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x)\, \psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk\ \tilde{\psi}^*(k)\, \tilde{\psi}(k) \ = 1.$$

A zatem jeśli $\tilde{\psi}(k)$ jest unormowana, to także $\psi(x)$ ma normę równą 1.

Otrzymane tu wyniki łatwo uogólniają się na przypadek trzech (i więcej) wymiarów, ponieważ trójwymiarowa fala płaska

$$e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} = \prod_{n=1}^{3} e^{i\,k_n r_n}$$

daje się zapisać jako iloczyn trzech jednowymiarowych fal płaskich i dalej rozumowanie przebiega identycznie dla każdej z tych fal z osobna. Warto może w tym miejscu podać wzór na trójwymiarową funkcję δ Diraka

$$\int d^3\vec{r}\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}) = (2\pi)^3\delta(k_x)\,\delta(k_y)\,\delta(k_z). \tag{4.25}$$

Zauważmy na koniec, że

$$\tilde{\psi}(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,\psi(x)\,e^{-i\,kx}. \tag{4.26}$$

Faktycznie, podstawiając do (4.26) równanie (4.22) i korzystając ze wzoru (4.24), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(k) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{\sqrt{2\pi}}\,\tilde{\psi}(k')\,e^{i\,(k'-k)x} \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi}\,\tilde{\psi}(k')\,2\pi\,\delta(k-k') = \tilde{\psi}(k)\end{aligned}$$

4.4 Nieskończona studnia potencjału

Rozptrzmy teraz potencjał

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \text{ oraz } L < x \\ \\ 0 & 0 < x < L \end{cases}. \tag{4.27}$$

Wiemy, że wewnątrz studni ogólne rozwiązanie równania Schrödingera jest superpozycją fal płaskich

$$u(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = A'\sin(kx) + B'\cos(kx). \tag{4.28}$$

Nieskończoność potencjału na brzegach implikuje warunki brzegowe:

$$u(0) = u(L) = 0. \tag{4.29}$$

Pierwszy z tych warunków jest automatycznie spełniony dla gdy w drugim z równań (4.28) wybierzemy $B' = 0$. Druki warunek przyjmuje postać

$$\sin(kx) = 0 \;\rightarrow\; k = n\pi \tag{4.30}$$

gdzie $n = 1, 2, 3\ldots$. Warunek ten, biorąc pod uwagę (4.18) daje zdyskretyzowany wzór na energię

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2m}. \tag{4.31}$$

4.5 Dodatek: funkcja δ Diraka

W rzeczywistości ostatnia całka w równaniu (4.23) definiuje tzw. *funkcję delta* Diraka:

$$\delta(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{i\,\kappa x}. \tag{4.32}$$

Z matematycznego punktu widzenia $\delta(\kappa)$ jest *dystrybucją* i ma sens tylko pod całką po $d\kappa$. Aby nadać sens całce (4.32), uściślijmy jej definicję:

$$\delta(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} dx\, e^{i\,\kappa x} = \frac{1}{\pi} \lim_{R\to\infty} \frac{\sin R\kappa}{\kappa}. \tag{4.33}$$

Warto narysować wykres funkcji $\delta_R(\kappa) = 2\sin R\kappa/\kappa$ dla różnych R. Widzimy, że w miarę jak R dąży do nieskończoności wartość funkcji $\delta_R(\kappa)$ w zerze dąży do ∞, a podstawa $\Delta\kappa = 2\pi/R$ dąży do zera. Łatwo się przekonać, że całka z $\delta_R(\kappa)$ pozostaje jednak stała

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\, \delta_R(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\, R \frac{\sin R\kappa}{R\kappa}.$$

Wprowadzając nową zmienną $\xi = R\kappa$ otrzymujemy, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\, \delta_R(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \frac{\sin \xi}{\xi} = 1.$$

Całka ta nie zależy od R. Aby wykazać, że jest równa 1 rozważmy całkę z funkcji analitycznej $f(z)$ podzielonej przez z po konturze C, który składa się z dużego łuku o promieniu R, odcinka $(-R,-r)$, małego łuku o promieniu r i odcinka (r,R) w granicy $r\to 0$ i $R\to\infty$. Wewnątrz konturu C nie ma osobliwości więc

$$\int_{C_R} dz\, \frac{f(z)}{z} + \int_{-R}^{-r} dz\, \frac{f(z)}{z} - \int_{C_r} dz\, \frac{f(z)}{z} + \int_{r}^{R} dz\, \frac{f(z)}{z} = 0.$$

Znak przy C_r jest ujemny ze względu na kierunek obiegu. Załóżymy, że $f(z)$ znika w nieskończoności, wtedy całka po C_R znika. Z kolei całka po C_r wynosi:

$$\lim_{r\to 0} \int_0^{\pi} d\theta\, ir\, e^{i\theta} \frac{f(r\, e^{i\theta})}{r\, e^{i\theta}} = i\,\pi\, f(0).$$

Definiując całkę od $-\infty$ do $+\infty$ w sensie wartości głównej mamy:

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{f(z)}{z} = i\,\pi\,f(0). \tag{4.34}$$

Podstawiając za $f(z) = e^{iz}$ i porównując części urojone (4.34) otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\sin x}{x} = \pi\,\cos 0 = \pi,$$

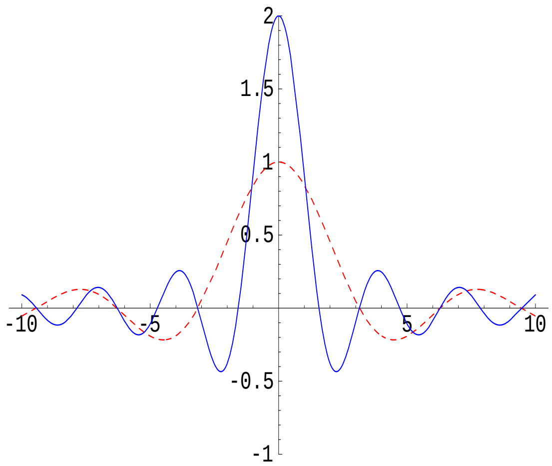
gdzie opuściliśmy symbol P, poniewa $\sin x\,/x$ nie ma osobliwości. Stąd całka z δ Diraka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\delta(x) = \lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\delta_R(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\,\frac{\sin\xi}{\xi} = 1. \tag{4.35}$$

Jest to podstawowa cecha funkcji δ Diraka: całka po osi rzeczywistej wynosi 1. Funkcja $\delta(x)$ Diraka scałkowana z dowolną *funkcją próbną* $g(x)$ daje wartość $g(0)$. Rzeczywiście, dla reprezentacji (4.33)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\delta(x)\,g(x) &= \frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\sin Rx}{x}g(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\,\frac{\sin\xi}{\xi}g(\frac{\xi}{R}) \\
&= g(0)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\,\frac{\sin\xi}{\xi} \\
&= g(0).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Powyższy dowód nie jest w pełni ścisły, ponieważ dość beztrosko zamieniliśmy kolejność przejścia granicznego z $R \to \infty$ i całkę po dx. Wynik ten jednak można do łatwo zrozumieć intuicyjnie. W miarę jak R rośnie, wkład do całki pochodzi tylko z wąskiego obszaru wokół $x = 0$, gdzie funkcja $g(x)$ w porównaniu z $\delta_R(x)$ jest prawie stała: $g(x) \approx g(0)$ i można ją wyciągnąć przed całkę, która na mocy (4.35) równa jest 1.



Rysunek 1: Wykres funkcji $\sin kR/k$ dla mał ego R (linia przerywana) i dla dużego R.