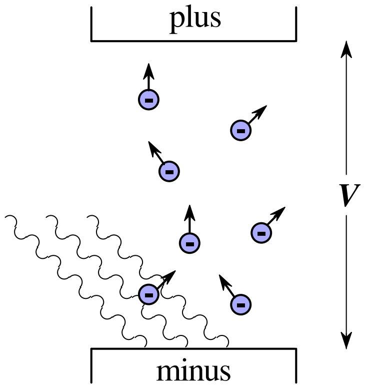
2 Fale materii – amplituda prawdopodobieństwa

2.1 Efekt fotoelektryczny

Efekt fotoelektryczny został po raz pierwszy zaobserwowany w roku 1887 przez H. Hertza - odkrywcę fal elektromagnetycznych. Omawiane poniżej wyniki otrzymał w roku 1916 R.A. Millikan. W efekcie fotoelektrycznym wyładowanie elektryczne między elektrodami zachodzi dużo łatwiej, gdy na katodę pada światło ultrafioletowe. Wiąże się to z tym, że pod wpływem światła

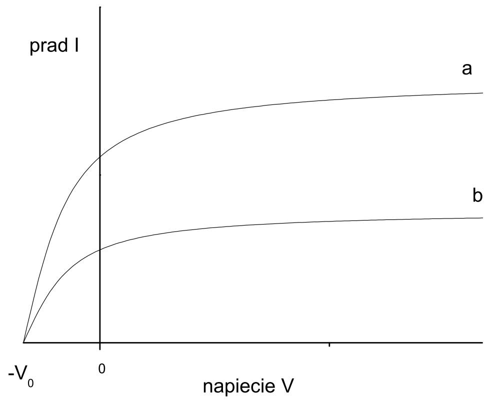


Rysunek 1: Elektrony wybite przez światło ultrafioletowe

Wybicie elektronów z katody można zaobserwować jako prąd elektryczny I przepływający między elektrodami, do których przyłożono napięcie V. Natężenie prądu proporcjonalne jest do liczby docierających do anody elektronów. Im większe napięcie przyłożymy, tym mniej elektronów zgubi się między katodą a anodą. A więc ze wzrostem V będzie rosnąć też I, aż wszystkie wybite elektrony zaczną docierać do anody. Wówczas dalsze zwiększanie V nie będzie powodować wzrostu I: nastąpi wysycenie.

Gdy zmienimy znak V, to elektrony, których energia kinetyczna jest na tyle duża, aby pokonać odpychanie elektomagnetyczne, będą ciągle docierać do anody. Wreszcie przy pewnej wartości krytycznej $-V_0$ natężenie I zmaleje do zera (patrz rysunek 2). Miarą energii kinetycznej najszybszych elektronów jest $eV_0 = E^{\rm kin}_{\rm max}$. Zwiększenie *natężenia* światła (czyli amplituty drgań fali elektromagnetycznej) powoduje wybicie większej liczby elektronów, ale nie zmienia $E^{\rm kin}_{\rm max}$ (czyli wartości V_0). Natomiast zwiększenie *częstości* światła ν powoduje wzrost $E^{\rm kin}_{\rm max}$ (czyli wzrost V_0), przy czym istnieje *minimalna* częstość krytyczna ν_0, dla której elektrony nie są wybijane i prąd nie płynie. Tych efektów nie można było wytłumaczyć przy pomocy falowej teorii światła.

W świetle teorii klasycznej, według której światło jest falą drgań z częstością ν wektora pola elektrycznego $\vec{E}$ (oraz, co dla nas tu nieistotne, wektora $\vec{B}$), wzrost natężenia interpretuje się jako zwiększenie amplitudy drgań, czyli $\vec{E}_{\rm max}$. Na elektrony w katodzie działa chwilowa siła $e\vec{E}(t)$, z czego wynika, że maksymalna energia kinetyczna uwalnianych elektronów powinna rosnąć wraz ze wzrostem natężenia światła. Efekt wybijania



Rysunek 2: Natężenie prądu I w funkcji napięcia V dla dwóch różnych natężeń padającego światła $N_a > N_b$.

elektronów powinien zachodzić dla wszystkich częstości, byleby natężenie fali było na tyle duże, aby dostarczona elektronom energia była większa niż energia potrzebna do wybicia ich z katody.

Wytłumaczenie efektu fotoelektrycznego podał Einstein w roku 1905. Założył on, że promieniowanie elektromagnetyczne ma charakter korpuskularny, czyli, że składa się z wiązki cząstek (fotonów) o energii $h\nu$. Natężenie światła odpowiada liczbie cząstek we wiązce. Drugie założenie Einsteina dotyczyło oddziaływania fotonów z elektronami. Mówiło ono, że elektron absorbouje całkowicie foton przejmując jego energię. Stąd energia kinetyczna wybitego elektronu wynosi

$$E^{\mathrm{kin}} = h\nu - W,$$

gdzie W jest pracą potrzebną na wyrwanie elektronu z powierzchni. Istnieje pewna minimalna wartość W, której odpowiada maksymalna wartość energii kinetycznej wybitego elektronu

$$E^{\mathrm{kin}}_{\mathrm{max}} = h\nu - W_{\mathrm{min}}. \tag{2.1}$$

W_{min} jest stałą zależną od materiału.

Widać od razu, że przyjęte przez Einsteina założenia tłumaczą efekt fotoelektryczny. Po pierwsze zwiększając natężenie światła, zwiększamy liczbę padających na katodę fotonów, a zatem z jej powierzchni wybijana jest większa liczba elektronów, co powoduje wzrost I. Po drugie, aby elektron został wybity musi zajść

$$h\nu > W_{\mathrm{min}},$$

a zatem istnieje częstość progowa, poniżej której zjawisko fotoelektryczne nie zachodzi.

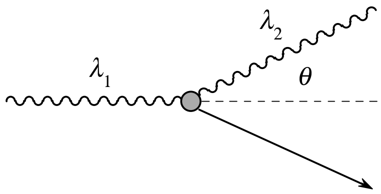
Korzystając ze wzoru (2.1) możemy wyliczyć wartość V_0 (potencjału „wstecznego", przy którym zanika efekt fotoelektryczny):

$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{1}{e}W_{\min}.$$

Liniowy przebieg tej zależności jest znakomicie potwierdzony doświadczalnie, a z nachylenia tej krzywej można wyliczyć stałą Plancka (Millikan 1914 - 1916).

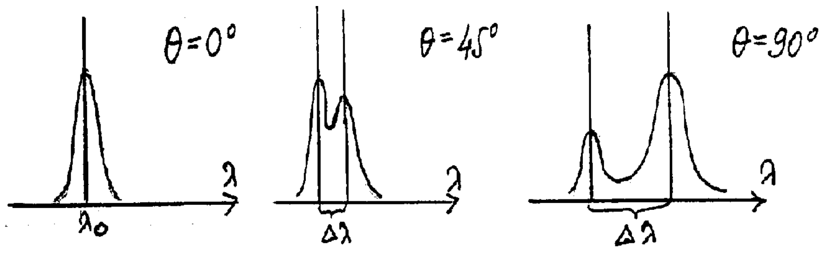
Podana przez Einsteina interpretacja efektu fotoelektrycznego stała w sprzeczności z ugruntowaną teorią falową. W szczególności wydawało się, że zjawisko dyfrakcji w żaden sposób nie daje się pogodzić z korpuskularnym modelem promieniowania. Doświadczenia Millikana potwierdziły jednak koncepcję kwantów światła, a w roku 1921 Einstein otrzymał nagrodę Nobla za wyjaśnienie efektu fotoelektrycznego.

2.2 Efekt Comptona



Rysunek 3: Rozpraszanie fotonu na elektronie.

Interpretacja korpuskularna promieniowania byłaby niepełna, gdyby z falami nie można było skojarzyć pędu. A.H. Compton w latach 1917-1923 badał rozpraszanie promieni X na elektronach. Typowe doświadczenie tego typu polega obserwacji rozproszonej wiązki promieni X o wyjściowej długości fali λ_1 pod różnymi kątami θ. Obserwuje się tzw. przesunięcie fal w stronę fal dłuższych. Tzn., że mierząc długość rozproszenego pod kątem θ promieniowania X, oprócz oryginalnej długości fali λ_1, pojawia się dodatkowa składowa $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, gdzie $\Delta\lambda > 0$, przy czym $\Delta\lambda$ rośnie wraz ze wzrostem kąta θ.



Rysunek 4: Przesunięcie długości fali przy rozpraszaniu promieni X.

Wytłumaczenie tego efektu opiera się na założeniu, że promienowanie X składa się z bezmasowych fotonów o energii E i pędzie $\vec{p}$, przy czym spełnione są związki:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}, \quad |\vec{p}| = h\frac{\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{2.2}$$

Związki te pozostają w zgodzie ze szczególną teorią względności Einsteina. Przypomnijmy, że dla cząstki swobodnej o masie spoczynkowej m_0 zachodzi:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tag{2.3}$$

gdzie $\vec{v}$ ($v = |\vec{v}|$, przyjmiemy konwencję, że litera oznaczająca wektor, bez strzałki oznacza moduł tego wektora) jest prędkością cząstki. Widać stąd, że dla cząstki bezmasowej jaką jest foton: $E = |\vec{p}|c$; związek ten redukuje się do równań (2.2). Z drugiego równania (2.3) wynika, że jeśli $m_0 \to 0$, to $v \to c$, tak aby pęd by skończony i różny od 0. Właśnie z tego powodu, że foton jest bezmasowy i porusza się z prędkością światła, musimy do opisu zjawiska Comptona użyć opisu relatywistycznego. Korzystając z bilansu energii i pędu przed i po zderzeniu, przy założeniu, że na początku elektron spoczywa:

$$p_1 c + m_e c^2 = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} + p_2 c,$$
$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e$$

łatwo wykazać, że

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 2\frac{h}{m_e c}\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{2.4}$$

A zatem pojawienie się nowej fali o długości λ_2 jest wynikiem elastycznego rozproszenia fotonu na elektronie. Charakterystyczna skala tego zjawiska $h/m_e c = 2,42 \times 10^{-10}$cm. Fakt, że oprócz fali λ_2 widzimy ciągle oryginalną falę λ_1 wynika z tego, że niektóre rozproszenia zachodzą nie na (prawie) swobodnym elektronie, ale wiele tysięcy razy cięższym od niego całym atomie atomie; wówczas $\Delta\lambda \approx 0$.

2.3 Fale materii

2.3.1 Hipoteza de Broglie

Louis de Broglie odwrócił rozumowanie Comptona i Einsteina, i zaproponował hipotezę, że skoro fale mogą wykazywać cechy korpuskularne, to cząstki powinny także w pewnych okolicznościach zachowywać się jak fale. Swoją hipotezę de Broglie sformułował w roku 1924, a jej potwierdzenie przez C. Davissona i G.P. Thomsona (syna J.J. Thomsona odkrywcy elektronu) przyszło w roku 1927. De Broglie otrzymał nagrodę Nobla w roku 1929, a Davisson i Thomson w roku 1937.

De Broglie postawił hipotezę, że z ruchem cząski swobodnej o energii E i pędzie $\vec{p}$ związana jest fala o częstości ν i długości λ, przy czym

$$E = h\,\nu, \quad p = |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda}. \tag{2.5}$$

Równanie (2.5) łączy ze sobą wielkości typowo korpuskularne z wielkościami falowymi. Związki te są analogiczne do związków Einsteina i Comptona, choć kontekst jest tu zupełnie inny.

Warto sobie uzmysłowić, że falowa natura światła ujawnia się w eksperymentach dyfrakcyjnych wtedy, kiedy typowy rozmiar przyrządu, np. szczeliny, jest rzędu lub mniejszy od długości fali. Nigdy nie zaobserwujemy interferencji na „szczelinach”, którymi są sąsiednie drzwi do sali wykładowej. Pdobnie rzecz się ma z falami materii. Długość fali de Broglie'a dla kuli o masie 1 kg poruszającej się z prędkością 10 m/s wynosi $\lambda = 6,63 \times 10^{-25}$Å. Jest to wielkość niesłychanie mała: dla porównania promień atomu wodoru wynosi około 0.5 Å (1 Å = 10^{-10}m). Z kolei dla elektronu o energii 100 eV (1 eV jest energią jaką uzyskuje elektron przyśpieszony przez różnicę potencjałów 1 V; 1 eV $= 1,6 \times 10^{-19}$J) długość fali $\lambda = 1,2$Å. Jest to już liczba całkiem duża i można spodziewać się efektów falowych przy rozpraszaniu elektronów na kryształach.

Często zamiast posługiwać się długością λ i częstością ν wprowadza się liczbę falową k i częstość kołową ω:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi\nu. \tag{2.6}$$

Związki (2.5) dają się zapisać przy pomocy tzw. uniwersalnej stałej Plancka $\hbar$:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \tag{2.7}$$

w następujący sposób:

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k. \tag{2.8}$$

2.3.2 Interferencja fal materii

Jednym z najbardziej zaskakujących wyników doświadczalnych jest nie tyle sam fakt, że wiązka – dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że elektronów – przechodząc przez układ dwóch szczelin daje na ekranie typowy dla optyki obraz interferencyjny, ale to, że cecha *bycia falą* czy też *bycia cząstką* zależy od sposobu przeprowadzenia doświadczenia i jest cechą pojedynczego elektronu a nie całej wiązki. Spróbujmy wytłumaczyć to na przykładzie „działa elektronowego”, które jest w stanie „strzelać” pojedynczymi elektronami, w taki sposób, że są one od siebie wyraźnie odseparowane. Za przesłoną ze szczelinami umieścimy ekran, który „pamięta” punkt, w który udrzył elektron.

Pierwsze doświadczenie polagać będzie na przejściu elektronów przez pojedynczą szczelinę. Na ekranie będą pojawiać się pojedyncze błyski, które w miarę upływu wytworzą na ekranie obraz natężenia (liczby zliczeń), przypominający krzywą dzwonową, tak jak to przedstawia rysunek. Szerokość takiego obrazu szczeliny jest odwrotnie proporcjonalna do szerokości szczeliny; dla szczeliny większej od długości fali elektronu na ekranie otrzymamy ostrą kreskę, dla szczeliny wąskiej – rozmyty obraz, podobny do obrazu dyfrakcyjnego wiązki światła.

W drugim doświadczeniu będziemy obserwować obraz wytworzony przez elektrony przechodzące przez dwie szczeliny. Podobnie jak w poprzednim przypadku zobaczymy wiele pojedynczych błysków, które w miarę czasu ułożą się w typowy obraz interferencyjny, z globalnym maksimum w środku. Zauważmy, że eksperyment został tak przeprowadzony, że nie wiemy przez którą szczlinę przeszedł pojedynczy elektron. Nasza „klasyczna" intuicja podpowiada nam, że ta informacja nie jest istotna, elektron przechodzi bowiem przez jedną ze szczelin, jego tor ugina się tak jak w poprzednim doświadczeniu i pada na ekran. Jednakże, jeśli chwilę się zastanowić, rozumowanie to prowadzi do sprzeczności, albowiem gdyby natężenie promieniowania obserwowane na ekranie było sumą natężeń od każdej ze szczelin obserwowalibyśmy obraz będący sumą dwóch krzywych dzwonowych przypominającą „podwójny pagórek", a nie obraz interferencyjny.

Przeprowadźmy więc trzecie doświadczenie, w którym w sposób możliwie najdelikatniejszy będziemy starali się ustalić, przez którą szczelinę przeszedł elektron. Ważne jest, aby poprzez tę obserwację nie zaburzyć zbytnio ruchu elektronu. W wyniku takiego doświadczenia zaobserwujemy, że każdy z elektronów przechodzi przez jedną albo przez drugą szczelinę, a więc zgodnie z naszą intuicją „klasyczną". Jednakże na ekranie nie pojawi się obraz interferencyjny, ale „podwójny pagórek" będący sumą dwóch krzywych dzwonowych.

Jest to wynik dość zaskakujący, bo sugeruje, że w doświadczeniu drugim, elektron przechodzi przez obie szczeliny jednocześnie. Ta klasycznie nonsensowna interpretacja daje się jednak obronić. Okazuje się, że kwantowo dla obiektów mikroskopowych nie istnieje pojęcie trajektorii klasycznej. Elektron dochodzi od działa do ekranu przez całą dostępną mu przestrzeń. Dopiero trakcie pomiaru (np w momencie uderzenia w ekran) elektron zostaje „zlokalizowany" w jednym, konkretnym miejscu. Jednakże nie jesteśmy w stanie przewidzieć gdzie nastąpi kolejny błysk. Za każdym razem elektron pada w jakieś przypadkowe miejsce na ekranie, jedynie suma wielu błysków daje nam obraz interferencyjny.

Z tego punktu widzenia podglądanie elektronu zaraz po przejściu przez szczelinę lokalizuje jego tor i dostarcza nam dodatkowej informacji o układzie fizycznym. Nie jest to więc ten sam układ co w doświadczeniu drugim i dlatego inny jest wynik całego eksperymentu. W następnym rozdziale spróbujemy przetłumaczyć duskutowane tu wynki na język postulatów matematycznych i wprowadzić formalizm, który pozwoli nam otrzymać nie tylko wyniki jakościowe, ale i ilościowe.

3 Trajektorie kwantowe

3.1 Amplituda prawdopodobiestwa

Kiedy mówimy o falach materii, musimy wprowadzić amplitudę fali $\psi(\vec{x}, t)$. Podstawowe dwa pytania brzmią: jaką interpretację fizyczną ma funkcja ψ i jakie spełnia równanie. Ponieważ chcemy przy pomocy funkcji ψ opisać zjawisko interferencji fal materii, powinna mieć ona sens zbliżony do amplitud fal, jakie znamy z optyki. Z drugiej strony powinna nieść możliwie pełną informację o układzie, to znaczy znając ψ powinniśmy móc wyliczyć np. położenia cząstek, pędy bądź ich energie.

W mechanice klasycznej stan układu jest jednoznacznie określony przez podanie pędów i położeń wszystkich cząstek (elementów) układu fizycznego. Zauważmy na marginesie, że czasami rezygnujemy z tak szczegółowego opisu. Dzieje się tak w przypadku układu wielu cząstek (np. gaz), gdzie przechodzimy, podobnie jak to zrobiliśmy w pierwszym rozdziale, do opisu probabilystycznego. Rozkład Boltzmanna mówi nam o *prawdopodobieństwie* znalezienia cząstki o zadanej energii.

W mechanice kwantowej podstawowym obiektem będzie *funkcja falowa*, która ma sens *amplitudy prawdopodobieństwa. Satystyczną* interpretację funkcji falowej podał w roku 1926 Max Born. Wg Borna funkcja falowa $\psi(\vec{r}, t)$ ma sens *amplitudy prawdopodobieństwa* znalezienia cząstki w punkcie $\vec{r}$ w chwili t. To znaczy, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w małej objętości dV wokó punktu $\vec{r}$ wyraża się wzorem:

$$dP(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \, dV = \psi^*(\vec{r}, t) \, \psi(\vec{r}, t) \, dV. \tag{3.9}$$

Z powyższego wynika, że ponieważ prawdopodobieństwo znalezienia cząstki gdziekolwiek (które wynosi 1) jest całką po całej przestrzeni, funkcjami falowymi mogą być tylko takie funkcje, które dają sie unormować w kwadracie

$$\int |\psi(\vec{x}, t)|^2 \, d^3\vec{x} = 1. \tag{3.10}$$

Warto w tym miejscu wspomnieć, że warunek (3.10) można intepretowaæjako *iloczyn skalarny* funkcji ψ ze sobą, gdzie iloczyn skalarny dla dwu dowolnych funkcji ψ i φ zdefiniowany jest jako:

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi^*(\vec{r}) \, \psi(\vec{r}) \, dV. \tag{3.11}$$

Zauważmy, że pomnożenie funkcji ψ prze fazę $e^{i\theta}$ nie zmienia gęstości prawdopodobieństwa, a zatem z fizycznego punktu widzenia funkcje

$$\psi \quad \text{i} \quad e^{i\theta}\psi$$

są równoważne.

I wreszcie ostatnia uwaga: z równania (3.10) wynika, że funkcja falowa ma wymiar $[1/\sqrt{\text{objętość}}]$.

Spróbujemy teraz wykorzystać omówione w poprzednim rozdziale doświadczenia z interfernecją elektronów do skonstruowania równania, które musi spełnieć ψ. Najpierw jednak przypomnijmy sobie, jak w mechanice klasycznej konstruuje się równania ruchu.

3.2 Trajektorie klasyczne

Klasyczne równania trajektorii cząstki opisanej funkcją Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x) \tag{3.12}$$

wyprowadza się z *zasady najmniejszego działania*. Działanie zdefiniowane jest jako

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x, t)\, dt. \tag{3.13}$$

Klasyczną trajektorię $\overline{x}(t)$ otrzymuje się z żądania, aby dla S było minimalne. Rozważmy inną trajektorię

$$x(t) = \overline{x}(t) + y(t), \quad y(t_1) = y(t_2) = 0, \tag{3.14}$$

przy czym

$$\overline{x}(t_1) = x_1,\ \overline{x}(t_2) = x_2.$$

Wyliczmy działanie dla trajektorii (3.14) z dokładnością do wyrazów liniowych w y:

$$\begin{aligned} S[\overline{x}+y] &= \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\overline{x}} + \dot{y}, \overline{x}+y, t)\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(\dot{\overline{x}}, \overline{x}, t) + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + y\frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \\ &= S[\overline{x}] + \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} \right] y\, dt. \end{aligned}$$

Zarządamy teraz aby człon liniowy w y zerował się:

$$\delta S \equiv S[\overline{x}+y] - S[\overline{x}] = 0 \tag{3.15}$$

dla dowolnego y. Stąd otrzymujemy klasyczne równania ruchu

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

których rozwiązaniem jest klasyczna trajektoria $\overline{x}(t)$. Odpowiadające jej działanie nazywamy działaniem klasycznym:

$$S_{\mathrm{cl}} = S[\overline{x}]$$

Trajektorie różne od $\overline{x}(t)$ charakteryzująsię na ogół działaniem znacznie większym od S_{cl}, za wyjątkiem trajektorii bardzo bliskich $\overline{x}(t)$, dla których na mocy warunku (3.15) działanie jest praktycznie równe S_{cl}.

3.3 Sumowanie po trajektoriach

W mechanice klasycznej stwierdzenie, że cząstka w chwili t_a znajduje się w punkcie x_a jest jak najbardziej uprawnione, w mechanice kwantowej możemy mówić tylko o prawdopodobieństwie znalezienia cząstki w punkcie x_a. W mechanice klasycznej w chwili t_b

cząstka znajdzie się w punkcie $x_b = \overline{x}(t_b)$. Postawmy pytanie: jak w mechanice kwantowej wygląda prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w punkcie x_b w chwili t_b, jeśli znamy amplitudę prawdopodobieństwa w chwili t_a? Odpowiedź na to pytanie podał R.P. Feynman, który zapostulował, że szukana amplituda prawdopodobieństwa $\psi(x_b, t_b)$ dana jest wzorem

$$\psi(x_b, t_b) = \int dx_a \sum_{\substack{\text{trajektorie} \\ \text{od } x_a \text{ do } x_b}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_a \to x_b]} \psi(x_a, t_a). \tag{3.16}$$

Przeanalizujmy wzór (3.16). Najpierw ustalamy punkt x_ai konstruujemy *wszystkie* trajektorie prowadzące od $x_a \to x_b$. Dla każdej takiej trajektorii wyliczamy działanie $S[x_a \to x_b]$. Następnie wykonujemy sumę czynników fazowych dla wszystkich trajektorii i mnożymy wynik przez $\psi(x_a, t_a)$. Całą tę procedurę powtarzamy dla *wszystkich* x_a. Interpretując tę procedurę w języku fizyki klasycznej, możemy powiedzieć, że cząstka dochodzi do x_b po wszystkich możliwych trajektoriach. Z kolei największy przyczynek pochodzi od trajektorii klasycznej i bliskich jej trajektorii, ponieważ dla nich działanie jest prawie stałe. Dla pozostałych trajektorii działnie zmienia się i czynniki fazowe $\exp(i/\hbar\, S)$ będą się w praktyce znosić. Wielkość

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_{\substack{\text{trajektorie} \\ \text{od } x_a \text{ do } x_b}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_a \to x_b]} \tag{3.17}$$

nazywamy *propagatorem.*

3.4 Interferencja fal materii

Przeanalizujmy teraz prosty przykład jednowymiarowy, który pozwoli nam zrozumieć istotę eksperymentu z interferencją fal materii. Rozważmy propagację od $t_a \to t_b$ i dalej $t_b \to t_c$. Zgodnie z (3.16) i (3.17)

$$\psi(x_c, t_c) = \int dx_b K(c, b) \psi(x_b, t_b) = \int dx_b K(c, b) \int dx_a K(b, a) \psi(x_a, t_a). \tag{3.18}$$

Jest to bardzo ważny wzór określający prawo składania propagatorów:

$$K(c, a) = \int dx_b K(c, b)\, K(b, a). \tag{3.19}$$

Załóżmy teraz, że w chwili t_b „oświetlamy” nagle oś x za wyjątkiem 2 małych obszarów wokół ξ i $-\xi$. Jeśli zobaczymy cząstkę to przypadek taki odrzucamy. Następnie w chwili t_c obserwujemy rozkład cząstek na osi x. Przy tak zrealizowanym eksperymencie mamy pewność, że cząstka przeszła przez którąś ze „szczelin” w $\pm\xi$. Wzór (3.18) przyjmuje wówczas postać

$$\psi(x_c,t_c) = \int\limits_{-\xi-\varepsilon}^{-\xi+\varepsilon} dx_b K(c,b) \int dx_a K(b,a)\psi(x_a,t_a) + \int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} dx_b K(c,b) \int dx_a K(b,a)\psi(x_a,t_a).$$

A zatem funkcja falowa w chwili t_c ma dwie składowe: jedną odpowiadającą przejściu przez szczelinę $-\xi$ i drugą odpowiadającą przejściu przez szczelinę ξ:

$$\psi(x_c,t_c) = \psi_{-\xi}(x_c,t_c) + \psi_{\xi}(x_c,t_c).$$

Obliczając $|\psi(x_c,t_c)|^2$ otrzymujemy 4 człony

$$|\psi(x_c,t_c)|^2 = |\psi_{-\xi}(x_c,t_c)|^2 + |\psi_{\xi}(x_c,t_c)|^2 + \psi^*_{-\xi}(x_c,t_c)\psi_{\xi}(x_c,t_c) + \psi^*_{\xi}(x_c,t_c)\psi_{-\xi}(x_c,t_c).$$

Dwa ostatnie człony odpowiedzialne są za interferencję.

Warto w tym miejscu zrobić dwie uwagi. Po pierwsze przez cały czas rozpatrywaliśmy propagację *jednej* cząstki. Interferncja jest tu wynikiem faktu nieistnienia toru cząstki w mechanice kwantowej i konieczności uwzględnienia wszytkich trajektorii między punktem początkowym a końcowym. Po drugie, jeśli w jakiś sposób stwierdzilibyśmy, że cząstka w chwili t_b przeszła np. przez szczelinę ξ, to wówczas nie mielibyśmy całkowania wokół $-\xi$ i tym samym nie byłoby interferencji.

Na koniec podamy jakościowy argument za tym, że interferencja zachodzi tylko dla bardzo wąskich szczelin, tj. dla małych ε. Jeżeli ε jest „duże", to przez sczelinę przechodzi wiązka trajektorii bliskich klasycznej, dla których działanie jest prawie stałe i w związku z tym możemy zaniedbać przyczynki od trajektorii dalekich od trajektorii klasycznej. Wówczas uzyskany obraz nie będzie różnił się od klasycznego i falowa natura cząstek się nie ujawni. Z kolei wąska szczelina „odfiltruje" większość trajekorii bliskich trajektorii klasycznej i w związku z tym powstały za nią obraz będzie w pełni kwantowy, tzn. wszystkie trajektorie dadzą jednakowy przyczynek i powstanie obraz interferencyjny.