

Mechanika Kwantowa III rok

zestaw 9 na dzień

06.12.2021. poniedziałek 14:15, sala A-2-07

07.12.2021. wtorek 14:15, sala A-2-01

1. System N spinów ($s = 1/2$) znajduje się w stanie

$$|\psi\rangle = |+\rangle_1 |+\rangle_2 \cdots |+\rangle_n |-\rangle_{n+1} |-\rangle_{n+2} \cdots |+\rangle_N$$

gdzie dla uproszczenia przyjęliśmy notację

$$|1/2, \pm 1/2\rangle_i = |\pm\rangle_i.$$

Obliczyć średnią wartość kwadratu całkowitego spinu \vec{S} w tym stanie:

$$\langle\psi| \vec{S}^2 |\psi\rangle = ?$$

2. Załóżmy, że elektron jest w stanie opisanym funkcją falową

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (e^{i\varphi} \sin\theta + \cos\theta) g(r)$$

gdzie $g(r)$ jest unormowana

$$\int_0^\pi dr r^2 |g(r)|^2 = 1.$$

Jakie są możliwe wyniki pomiaru L_z elektronu w tym stanie? Z jakim prawdopodobieństwem otrzymamy każdy z tych wyników? Jaka jest wartość oczekiwana L_z ?

3. Bardzo uproszczone podejście do mas cząstek złożonych z trzech kwarków (barionów) zakłada, że masa M cząstki złożonej z 3 kwarków ma postać

$$M = \sum_{i=1}^3 m_i + \frac{4}{\hbar^2} \sum_{i>j}^2 \frac{\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j}{m_i m_j} v_{ij}, \quad (1)$$

gdzie m_i oznaczają masy. Drugi człon odpowiada za oddziaływanie spinowych momentów magnetycznych (\vec{s}_i oznacza spin kwarku i). Siła tego oddziaływania v_{ij} mogłaby w zasadzie zależeć od rodzajów oddziaływujących kwarków, ale na potrzeby tego zadania proszę przyjąć, że $v_{ij} = v$. Zakładając, że $m_u = m_d$ wykazać, że masa nukleonu i rezonansu Δ o spinach odpowiednio $1/2$ i $2/3$ wynoszą:

$$M_N = 3m_u - 3\frac{v}{m_u^2},$$
$$M_\Delta = 3m_u + 3\frac{v}{m_u^2}.$$

WSKAZÓWKA. Mamy tu do czynienia z układem trzech spinów. Aby otrzymać sumaryczny spin $1/2$ lub $3/2$ należy najpierw dwa dowolne spiny złożyć na 1 lub 0 , a następnie dołożyć trzeci spin i złożyć go z sumarycznym spinem dwóch kwarków na żądany spin końcowy. Iloczyny spinów obliczamy w standardowy sposób podnosząc sumy spinów do kwadratu. Korzystając z faktu, że masa nukleonu wynosi około 940 MeV a masa rezonansu Δ 1230 MeV obliczyć m_u i v .

4. Hyperon Ω^- jest cząstką o spinie $3/2$. Ω^- rozpada się na bezspinowy mezon K^- i hyperon Λ^0 o spinie $1/2$:

$$\Omega^- \rightarrow K^- + \Lambda^0.$$

Jaką formę ma najogólniejszy rozkład kątowy mezonu K^- względem kierunku spinu Ω^- jeżeli spoczywający przed rozpadem hyperon Ω^- miał rzut spinu na oś z równy $3/2$?

WSKAZÓWKA:

Po pierwsze trzeba sobie odpowiedzieć na pytanie co to jest rozkład kątowy. W tym celu należy skonstruować f. falową mezonu K^- i podnieść ją do kwadratu. Funkcja ta składa się z części spinowej i kątowej (funkcja kulista) złożonych odpowiednio przy pomocy wsp. Clebscha-Goradana na stan $|3/2, 3/2\rangle$. Takich funkcji mamy dwie i pełna f. falowa jest ich sumą z pewnymi (nieznanymi) współczynnikami. Za funkcje spinowe przyjąć unormowane wektory własne \hat{S}_3 :

$$\chi_{s=1/2}^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi_{s=1/2}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$