Mechanika Kwantowa III rok

zestaw 6 na dzień

15.11.2021. poniedziałek 14:15, sala A-2-07

16.11.2021. wtorek 14:15, sala A-2-01

1. Cząstka bezspinowa opisywana jest funkcją falową

$$\psi(r,\theta,\varphi) = N(x \pm y + 2z)e^{-\alpha r}.$$

Znaleźć średnie $\hat{L}^2$ i $\hat{L}_z$ w tym stanie. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania w wyniku pomiaru $\hat{L}_z$ wartości $\hbar$,wartości 0.

WSKAZÓWKA: Należy unormować część kątową. Najlepiej zrobić to, rozpisując f. falową na f. kuliste.

2. Hamiltonian opisujący cząstkę o kręcie 1 ma postać:

$$H = A\frac{1}{\hbar}s_z + 2C\frac{1}{\hbar^2}s_x^2.$$

W chwili $t = 0$ cząstka jest w stanie własnym s_z do wartości własnej $+\hbar$. Obliczyć wartość oczekiwaną operatora spinu dla dowolnego t.

WSKAZÓWKA:

Znaleźć energie E_i $(i = 1, 2, 3)$ i odpowiadające im znormalizowane wektory własne $\vec{e}_i$. Następnie rozłozyć funkcję falową w bazie tych wektorów własnych:

$$\vec{\psi}(t) = \alpha\,\vec{e}_1 \exp(-iE_1 t/\hbar) + \beta\,\vec{e}_2 \exp(-iE_2 t/\hbar) + \gamma\,\vec{e}_3 \exp(-iE_3 t/\hbar).$$

Stałe α, β i γ należy wyliczyć z warunku początkowego. Średnia wartość spinu wyraża się wzorem

$$\langle s_i \rangle (t) = \vec{\psi}^\dagger(t)\hat{s}_i\vec{\psi}(t).$$

Energie warto wyrazić przy pomocy wielkości

$$\omega = \sqrt{A^2 + C^2}.$$

3. Rozważmy nienaładowaną cząstkę o spinie 1/2, o momencie magnetycznym

$$\vec{\mu} = -2\mu_B\frac{1}{\hbar}\vec{S}$$

($\vec{S}$ jest operatorem spinu), która porusza się w nieskończonej studni potencjału $-L \le x \le L$. W części studni o $x \le 0$ włączono pole magnetyczne skierowane wzdłuż osi z: $\vec{B}_I = (0, 0, B)$, zaś w drugiej części dla $x \ge 0$ pole skierowane wzdłuż osi x: $B_{II} = (B, 0, 0)$. Zakładając, że pole B jest słabe wyliczyć energię stanu podstawowego w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

WSKAZÓWKA: Najpierw trzeba wyliczyć poziomy i f. falowe bez pola. Funkcje falowe mają postać

$$\Psi(x, m) = \psi(x)\chi(m),$$

gdzie

$$\chi(+1/2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \chi(-1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hamiltonian oddziaływania z polem magnetycznym ma postać

$$H' = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.$$

Przydatna całka

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x.$$