Mechanika Kwantowa III rok

zestaw 2 na dzień

11.10.2021. poniedziałek 14:15, sala A-2-07

12.10.2021. wtorek 14:15, sala A-2-01

1. Wyrazić operator Casimira $\sum_{i=1}^{3} \hat{J}_i^2$ przez $\hat{J}_\pm$ i $\hat{J}_3$.

2. Spełniające relacje komutacji dla krętu operatory:

$$\left(\hat{J}_k\right)_{lm} = -i\hbar\varepsilon_{klm},$$

nie są diagonalne. Zdiagonalizować operator $\hat{J}_3$, znaleźć unormowane wektory własne i diagonalizującą macierz U, taką że

$$\hat{J}_3^{\text{diag.}} = U^\dagger \hat{J}_3 U.$$

Następnie obliczyć $U^\dagger \hat{J}_{1,2} U$ i zbadać, jak postać tych operatorów zależy od wyboru faz wektorów własnych $\hat{J}_3$.

3. Definiujemy trzy operatory:

$$\hat{T}_1 = \frac{i}{4}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}\right),\ \hat{T}_2 = \frac{1}{4}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}\right),\ T_3 = \frac{1}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\,,$$

gdzie $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$ są operatorami kreacji i anihilacji. Obliczyć

$$\left[\hat{T}_1, \hat{T}_2\right],\ \left[\hat{T}_2, \hat{T}_3\right],\ \left[\hat{T}_3, \hat{T}_2\right],\ \sum_{k=1}^{3} \hat{T}_k^2.$$

Obliczając ostatnie wyrażenie przekształcić je do postaci, gdzie wszystkie operatory anihilacji są po prawej stronie.

4. Dla dwuwymiarowego oscylatora harmonicznego konstruujemy operatory

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right),\ \hat{T}_2 = \frac{i}{2}\left(\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2\right),\ T_3 = \frac{1}{2}\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2\right)\,.$$

Podobnie jak w poprzednim zadaniu obliczyć komutatory tych operatorów oraz ich komutatory z hamiltonianem dwuwymiarowego oscylatora harmonicznego $\hat{H}$ (wyrażonym przez operatory kreacji i anihilacji). Następnie obliczyć operator Casimira $\sum_{k=1}^{3} \hat{T}_k^2$ i wyrazić go przez hamiltonian $\hat{H}$. Korzystając ze znanego wzoru na wartość operatora Casimira obliczyć spektrum energii dwuwymiarowego oscylatora harmonicznego.