Mechanika Kwantowa III rok

zestaw 1 na dzień

4.10.2021. poniedziałek 14:15, sala A-2-07

5.10.2021. wtorek 14:15, sala A-2-01

1. Przypomnienie. Operatory momentu pędu zdefiniowane są jako
$$\hat{L}_i = (\hat{r} \times \hat{p})_i \quad \text{gdzie } i = 1, 2, 3 \text{ (lub alternatywnie } x, y, z)$$
Wyliczyć komutator
$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right].$$
Operator Casimra zdefiniowany jest jako suma kwadratów
$$\hat{L}^2 = \sum_{i=1}^{3} \hat{L}_i^2.$$
Obliczyć komutator
$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}^2\right].$$

2. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że macierze
$$T_i = \frac{\hbar}{2}\tau_i,$$
gdzie τ_i są macierzami Pauliego, spełniają reguły komutacji wyliczone dla operatorów $\hat{L}_i$ z poprzedniego zadania. Znaleźć jawną postać operatora Casimira $\sum \hat{T}_i^2$. Jawną postać macierzy Pauliego można znaleźć w dowolnym podręczniku mechaniki kwantowej.

3. Powtórzyć obliczenia z poprzedniego zadania dla macierzy 3×3
$$\left(\hat{J}_k\right)_{lm} = -i\hbar\varepsilon_{klm},$$
gdzie ε_{klm} jest całkowicie antysymetrycznym tensorem Levi-Civity. Proszę zwrócić uwagę, że indeks k w definicji $\hat{J}_k$ numeruje daną macierz 3×3, natomiast indeksy lm numerują wiersze i kolumny tej macierzy.

4. Znaleźć jawną postać operatora Casimira $\sum \hat{J}_i^2$ dla operatorów z poprzedniego zadania.

5. Definiujemy operatory (tutaj $\hat{J}_i$ oznacza operatory, które spełniają relacje komutacji takie jak $\hat{L}_i$)
$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm \hat{J}_2\,.$$
Obliczyć ich komutator i komutator z $\hat{J}_3$.

6. Wyrazić operator Casimira $\sum_{i=1}^{3} \hat{J}_i^2$ przez $\hat{J}_\pm$ i $\hat{J}_3$.