

Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 13

15.6.2021. wtorek - grupa 2

15.6.2021. wtorek (!) - grupa 1

1. Przy dyskusji spektrum atomu wodoru pominęliśmy całkowicie siłę grawitacji. Ile wynosiłaby energia stanu podstawowego atomu wodoru i ile wynosiłby odpowiedni promień Bohra, gdyby oddziaływanie proton-elektron było czysto grawitacyjne?
2. Ciężkie mezony ψ oraz Υ to cząstki złożone z kwarków c (powabny ang. *charm*) oraz b (piękny ang. *bottom* lub *beauty*) i odpowiadającym im antykwarkom: $\psi = c\bar{c}$, $\Upsilon = b\bar{b}$ o masach odpowiedni $m_c \simeq 1.2$ GeV, $m_b \simeq 4.5$ GeV. Do opisu stanów związanych można w tym przypadku zastosować przybliżenie nierelatywistyczne i posłużyć się równaniem Schrödingera z potencjałem, który na małych odległościach jest zbliżony do potencjału Coulomba, a na dużych jest liniowy. Celem niniejszego zadania jest zbadanie, jak dobre jest przybliżenie, że potencjał ten jest wyłącznie liniowy

$$V_{c,b}(r) = A_{c,b} + kr,$$

gdzie stała A może zależeć od masy kwarku m_c lub m_b a stała k jest uniwersalna. Do obliczenia energii w tym potencjale najlepiej posłużyć się przybliżeniem WKB dla równania na funkcję $\chi(r) = u(r)r$, które – jak wiemy – jest identyczne równaniem Schrödingera w jednym wymiarze. Warto pamiętać, że funkcja $\chi(r=0) = 0$ – wzór na przybliżenie, który to uwzględnił był podany na wykładzie 10, równanie (10.74). W przypadku cząstki złożonych z kwarków dodatkową komplikacją jest spin kwarków i związane z nim oddziaływanie, które tu pomijamy. Cząstki ψ oraz Υ mają spin równy 1, ale kręt orbitalny jest równy $l = 0$. Masy tych cząstek można znaleźć w tablicach dostępnych *on-line* <https://pdg.lbl.gov> w zakładce *Particle Listings*. Masy stanów podstawowych i pierwszych stanów wzbudzonych dla $l = 0$ wynoszą

$$\psi(1s) : M = 3096 \text{ MeV},$$

$$\psi(2s) : M = 3686 \text{ MeV},$$

$$\Upsilon(1s) : M = 9460 \text{ MeV},$$

$$\Upsilon(1s) : M = 10023 \text{ MeV}.$$

Korzystając z tych danych oraz ze wzorów na energie w przybliżeniu WKB dobrać stałe A oraz k , które odtwarzają w/w masy. Czy rzeczywiście stała k jest uniwersalna (taka sama dla systemu $c\bar{c}$ oraz $b\bar{b}$)? Obliczyć masy kilku wyższych stanów wzbudzonych i porównać z danymi doświadczalnymi.

WSKAZÓWKA

Warto dopasowywać nie samą stałą k ale stałą zawierającą k i stałe wymiarowe oraz masę kwarku z ostatecznej formuły WKB, a następnie sprawdzić, czy stosunek tych stałych dla systemu $c\bar{c}$ i $b\bar{b}$ skaluje się z masami kwarków, tak jak to wynika z formuły WKB.

3. Skalowanie różnic energii $\Delta E = E(2s) - E(1s)$ z masą ciężkiego kwarku z poprzedniego zadania można zgadnąć na podstawie analizy wymiarowej używając naturalnego układu jednostek. W w/w problemie mamy do czynienia z dwoma stałymi wymiarowymi k i m oraz jedną stałą fizyczną \hbar (problem jest nierelatywistyczny, więc c nie może pojawić się w jawny sposób). Mamy zatem

$$\Delta E \sim k^\alpha m^\beta \hbar^\gamma.$$

Obliczyć potęgi α, β, γ .

4. Tą samą metodą proszę pokazać jak z masą elektronu (masą zredukowaną) skaluje się energia atomu wodoru i promień Bohra.
5. Zadanie dodatkowe.

Zbadać degenerację poziomów Landaua dla drugiego wyboru cechowania dla pola magnetycznego użytego na wykładzie

$$\vec{A} = \frac{1}{2}B \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

W tym celu rozwiązać równanie różniczkowe na stan podstawowy

$$\hat{a} \psi_0(\mathbf{r}) = 0$$

gdzie

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y)$$

oraz

$$\hat{\pi}_x = \frac{\hat{p}_x + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}y}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}}, \quad \hat{\pi}_y = \frac{\hat{p}_y - \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}x}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}}.$$

WSKAZÓWKA

Warto wprowadzić oznaczenie

$$r_B^2 = \frac{\hbar}{m_e\tilde{\omega}}.$$

oraz nowe zmienne

$$u = x + iy, \quad v = x - iy.$$