Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 12

1.6.2021. wtorek - grupa 2
2.6.2021. środa - grupa 1

Suma punktów 21. Oceny[1]:
[0 – 11] - 2, (11 – 13] - 3, (13 – 15] - 3.5, (15 – 17] - 4, (17 – 19] - 4.5, (19– 21] - 5

1. (3 pkt.) Funkcja falowa stanu podstawowego atomu wodoru ma postać

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} 2\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$$

gdzie

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}.$$

Sprawdzić, czy funkcja ψ jest poprawnie unormowana. Obliczyć wartość średnią $1/r$ oraz r w tym stanie.

2. (6 pkt.) Energie i degenarcje poziomów trójwymiarowego oscylatora harmonicznego możemy w prosty sposób obliczyć we współrzędnych „kartezjańskich" jako sumę trzech oscylatorów jednowymiarowych w zmiennych x, y oraz z. Celem niniejszego zadania rozwiązanie tego problemu we współrzednych sferycznych. W tym celu warto wprowadzić nowe zmienne

$$\rho = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}r,\ \varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

i zapisać w nich równanie na radialną część funkcji falowej. Następnie należy postępować podobnie jak w przypadku jednowymiarowego oscylatora wyodrębniając asymptotykę f. falowej dla dużych ρ, a nastepnie zapostulować rozwiązanie w postaci szeregu

$$\psi = [\text{asymptotyka}] \times \sum_{n=0} a_n \rho^{n+\alpha}.$$

Znaleźć warunki na α a następnie warunki na kwantyzację energii. Porównać otrzymany wynik z rozwiązaniem „kartezjańskim" i przedyskutować degenerację.

3. (8 pkt.) Dla dyskutowanego w poprzednim zadaniu trójwymiarowego oscylatora harmonicznego wyrazić składowe operatorów krętu przez „kartezjańskie" operatory kreacji i anihilacji: $\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y^\dagger, \hat{a}_z^\dagger, \hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$.Obliczyć $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2+\hat{L}_z^2$. Obliczyć działanie $\hat{L}_z$ i $\hat{L}^2$ na stan

$$|n_x, n_y, n_z\rangle \,.$$

Znaleźć stany własne i wartości własne tych operatorów dla stanu podstawowego i pierwszego stanu wzbudzonego (który jest zdegenerowany).

[1] $(x$ lub $x)$ oznacza bez x, $[x$ lub $x]$ oznacza łącznie z x.

4. (3 pkt.) Cząstka o masie μ porusza się między dwoma sztywnymi (nieskończony potencjał) sferami $a \leq r \leq b$. Znaleźć energię stanu podstawowego ($l = 0$) i znormalizowaną funkcję falową. Warto posłużyć się wyprowadzonym poprzednio równaniem na funkcję $\chi(r) = u(r)/r$.