Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 11

25.5.2021. wtorek - grupa 2
26.5.2021. środa - grupa 1

Suma punktów 24. Oceny[1]:
[0 – 11.5] - 2,
(11.5 – 14] - 3, (14 – 16.5] - 3.5, (16.5 – 19] - 4, (19 – 21.5] - 4.5, (21.5– 24] - 5

1. (pkt. 12) Dla funkcji

$$F(u,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}} = \sum_{n=0} P_n(x)u^n \tag{1}$$

udowodnić następujace tożsamości

$$\begin{aligned}
(2n+1)xP_n &= (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}, &(2)\\
nP_n &= xP'_n - P'_{n-1}, &(3)\\
(2n+1)P_n &= P'_{n+1} - P'_{n-1}, &(4)\\
(n+1)P_n &= P'_{n+1} - xP'_n, &(5)\\
(1-x^2)P'_n &= n(P_{n-1} - xP_n). &(6)
\end{aligned}$$

Aby udowodnić, że $P_n(x)$ są wielomianami Legendre'a wykazać, że spełniają one równanie

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_l(x)\right] + l(l+1)P_l(x) = 0$$

korzystając z powyższych tożsamości.

WSAKAZÓWKI:

(2) - zróżniczkować (1) po u i porównać stronami;

(3) - zróżniczkować obie strony (1) po u, zróżniczkować obie strony (1) po x i pomnożyć przez $(x-u)$, porównać wyniki z obu różniczkowań;

(4) - zróżniczkować (2) i posłużyć się (3);

(5) - odjąć (3) od (4),

(6) - zamienić $n \to n-1$ w (5) i odjąć (3) pomnożone przez x.

[1] $(x$ lub $x)$ oznacza bez x, $[x$ lub $x]$ oznacza łącznie z x.

2. (pkt. 4) Równanie Legendre'a

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP(x)}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x)=0$$

rozwiązujemy zakładając, że

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+\alpha}$$

gdzie $z_0 = 1$albo $z_0 = -1$.

- znaleźć warunek na α,
- dla $m = 0$ znaleźć rekurencję dla współczynników a_n przyjmując $z_0 = 0$.

3. (pkt. 3) Aby rozwiązać równanie Legendre'a dla $m \neq 0$ należy podstawić:

$$P(x) = (1-x)^{|m|/2}(1+x)^{|m|/2}R(x) = (1-x^2)^{|m|/2}R(x).$$

Wyprowadzić równanie na $R(x)$.

4. (pkt. 3) Wykazać, że że różniczkując $|m|$-krotnie równanie Legendre'a dla $m = 0$ otrzymujemy równanie na $R(x)$ z poprzedniego zadania.

5. (pkt. 2) Radialne równanie Schrödingera ma postać

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left(V(r)-E\right)+\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u(r)=0. \tag{7}$$

Podstawić $u(r) = \chi(r)/r$ i wyprowadzić równanie na χ.