Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 8

27.4.2021. wtorek - grupa 2
28.4.2021. środa - grupa 1

Suma punktów 20. Oceny[1]:
[0 – 10] - 2, (10 – 12] - 3, (12 – 14] - 3.5, (14 – 16] - 4, (16 – 18] - 4.5, (18– 20] - 5

1. (pkt. 1.5) Obliczyć komutatory (dla przypadku trójwymiarowego):

$$\left[\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{p}}^2\right], \ \left[\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{p}}^2\right], \ \left[\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}, V(r)\right].$$

2. (pkt 0.5) Pokazać, że dla funkcji zależnej tylko od r zachodzi

$$\boldsymbol{r} \cdot \nabla V(r) = r \frac{\partial}{\partial r} V(r).$$

3. (pkt. 3) Cząstka o masie m porusza się w potencjale logarytmicznym $V(r) = C \ln(r/r_0)$ (przypadek trójwymiarowy).

   a Korzystając z twierdzenia o wiriale pokazać, że średnia prędkość obliczona w stanach własnych energii $|n\rangle$ jest stała i podać jej wartość.

   b Pokazać, że różnica energii między sąsiednimi poziomami jest niezależna od masy cząstki. W tym celu należy pokazać, że

   $$\frac{\partial}{\partial m}(E_n - E_{n-1}) = 0.$$

   WSKAZÓWKA: Użyć własności, że $E_n = \langle n| \hat{H} |n\rangle$

4. (pkt. 5) Korzystając ze wzorów z wykładu proszę obliczyć pełną poprawkę do stanu $|n\rangle$ (czyli do funkcji falowej) w drugim rzędzie rachunku zaburzeń (czyli z dokładnością do wyrazów λ^2). Określenie „pełny" oznacza uwzględnienie normalizacji stanu $|n\rangle$.

5. (pkt. 4) Jednowymiarowy oscylator harmoniczny poddany jest zaburzeniu stałą siła F:

   $$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\omega^2 m}{2}\hat{x}^2 + F\,\hat{x}.$$

   Traktując człon $\hat{H}' = F\,\hat{x}$ jako zaburzenie obliczyć poprawkę do energii w pierwszym nieznikającym rzędzie rachunku zaburzeń. Posłużyć się związkiem między $\hat{x}$ a operatorami kreacji i anihilacji.

[1] $(x$ lub $x)$ oznacza bez x, $[x$ lub $x]$ oznacza łącznie z x.

6. (pkt. 2) Energie oscylatora z poprzedniego zadania można obliczyć dokładnie. W tym celu wygodnie jest przepisać hamiltonian oscylatora w nowej zmiennej $y = x + F/\omega^2 m$. Znaleźć dokładny wzór na energie i porównać ze wzorem otrzymanym w poprzednim zadaniu.

7. (pkt. 4) Poprawka relatywistyczna do energii jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.

   Relatywistyczny operator energii kinetycznej ma postać

$$\hat{T} = \sqrt{m^2c^4 + \hat{p}^2c^2} - mc^2.$$

   Rozwinąć $\hat{T}$ w granicy $c \to \infty$ z dokładnością do wyrazów rzędu $\hat{p}^4/c^2$ i obliczyć poprawki do energii oscylatora traktując człon rzędu $\hat{p}^4$ jako zaburzenie. Obliczenia wykonać w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.