Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 7

20.4.2021. wtorek - grupa 2
21.4.2021. środa - grupa 1

Suma punktów 20. Oceny[1]:
[0 – 10] - 2, (10 – 12] - 3, (12 – 14] - 3.5, (14 – 16] - 4, (16 – 18] - 4.5, (18– 20] - 5

1. (3 pkt.) Obliczyć współczynniki przejścia T i odbicia R dla fali o energii $E > V_0 > 0$ padającej od lewej strony na stopień potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \end{cases}$$

   Sprawdzić, że zachodzi $R + T = 1$.

2. (1 pkt.) Przyjmując oznaczenia z wykładu dla problemu rozpraszania na studni potencjału (wzór (8.16) oraz (8.18)) wyprowadzić wzór na macierz rozpraszania S (wzór 8.20)).

3. (1 pkt.) Dla macierzy 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

   obliczyć macierz odwrotną A^{-1}.

4. (7 pkt.) Obliczyć macierz S dla rozpraszania na studni potencjału ($\mathrm{V}_0 > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a \leq x \leq a \\ 0 & a < x \end{cases} .$$

   przyjmując oznaczenia z wykładu (wzór (8.16)).

   Wskazówka: Po zapisaniu warunków zszycia w $x = -a$ należy obliczyć macierz $M_1^{-1}M_2$ korzystając z wyniku zadania 3. Macierz $M_3^{-1}M_4$ można otrzymać z macierzy $M_1^{-1}M_2$ zamieniając $k \longleftrightarrow q$ oraz $a \to -a$. Następnie należy wyliczyć cztery elementy macierzy $M = M_1^{-1}M_2M_3^{-1}M_4$. Dla uproszczenia wzorów warto przyjąć oznaczenia

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{q} + \frac{q}{k}\right),\ \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{q} - \frac{q}{k}\right),\ x = 2ak,\ y = 2aq.$$

   Poprawność otrzymanego wyniku na macierz M można sprawdzić sprawdzając, czy zachodzi $\det M = 1$. Pomocna będzie tożsamość

$$\varepsilon^2 - \eta^2 = ?.$$

[1] $(x$ lub $x)$ oznacza bez x, $[x$ lub $x]$ oznacza łącznie z x.

5. (2 pkt.) Korzystając ze wzoru na macierz S z poprzedniego zadania, obliczyć współczynnik przejścia i odbicia dla fali padającej z lewej strony ($D = 0$). Sprawdzić warunek $R + T = 1$.

6. (2 pkt.) Otrzymany w poprzednim zadaniu wzór na macierz S stosuje się także dla $V_0 < 0$ (czyli dla bariery potencjału). W przypadku energii większej niż wysokość bariery ($E > |V_0|$) wzór ten stosuje się bez zmian. Należy tylko pamiętać, że w tym przypadku $q < k$, podczas gdy w przypadku studni $k < q$. W przypadku gdy $|V_0| > E > 0$ mamy do czynienia z tunelowaniem. Otrzymane wzory stosują się, jeżeli zamienić $q = i\kappa$, gdzie κ jest rzeczywiste. Proszę przepisać wzór na macierz S dla tego przypadku, pamiętając, że sinus i cosinus od kąta urojonego zamieniają się na sinus i cosinus hiperboliczny. Dla wszystkich trzech przypadków (rozpraszanie na studni, przejście nad barierą i przejście przez barierę) zbadać, kiedy współczynnik odbicia się zeruje. W którym przypadku warunek braku odbicia nie sprowadza się do rozwiązania trywialnego.

7. (4 pkt.) Macierz S z zadania 4 ma bieguny dla urojonych $k = i\varkappa$. Pokazać, że warunek na bieguny jest równoważny warunkom na stany związane w studni potencjału (zestaw 4, zadanie 6). W tym celu warto posłużyć się wzorem

$$\cot(2\theta) = \frac{\cot^2(\theta) - 1}{2\cot(\theta)} = \frac{1}{2}\left(\cot(\theta) - \frac{1}{\cot(\theta)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan(\theta)} - \tan(\theta)\right).$$