

Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 5

30.3.2021. wtorek - grupa 2

31.3.2021. środa - grupa 1

Suma punktów 21. Oceny¹:

[0 – 11] - 2, (11 – 13] - 3, (13 – 15] - 3.5, (15 – 17] - 4, (17 – 19] - 4.5, (19– 21] - 5

1. (5 pkt.) Dla zadania 4. z poprzedniego zestawu (nieskończona studnia potencjału) znaleźć unormowane funkcje falowe i obliczyć średnie położenie $\langle x \rangle$ i średni pęd $\langle p \rangle$ oraz wartości średnich odchyłeń kwadratowych $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ i $\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle$. Sprawdzić, czy spełniona jest zasada nieoznaczoności.

Uwaga: Do rozwiązania tego zadania będzie trzeba wyliczyć kilka nie do końca oczywistych całek. Sugeruję posłużenie się pakietem *Mathematica*.

2. (2 pkt.) Jeżeli potencjał w równaniu Schrödingera zawiera osobliwą część w postaci funkcji δ Diraka, wówczas równanie to przyjmuje postać:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V_0\delta(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (1)$$

Funkcja $\psi(x)$ musi być ciągła w $x = 0$, ale pierwsza pochodna nie jest ciągła. Obliczyć wartość skoku pochodnej

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)] = ?$$

całkując stronami równanie (1) w granicach $-\varepsilon$ do ε : $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx$.

3. (4 pkt.) Korzystając z wyniku z poprzedniego zadania sprawdzić, czy istnieją stany związane o ujemnej energii dla potencjału $V_0\delta(x)$ gdy $V_0 < 0$.
4. (4 pkt.) Znaleźć warunki kwantyzacji energii dla potencjału z poprzedniego zadania, gdzie dodatkowo

$$V = \infty \text{ dla } x < -a$$

5. (4 pkt.) Znaleźć warunki kwantyzacji energii, jeżeli do nieskończonej studni z zadania 4. z poprzedniego zestawu dodano potencjał $V_0\delta(x)$, gdzie $V_0 > 0$.

¹(x lub x) oznacza bez x , [x lub x] oznacza łącznie z x .

6. (2 pkt.) Obliczyć komutator

$$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = ?,$$

gdzie tzw. operatory anihilacji i kreacji zdefiniowane są jako

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} \hat{p},$$
$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}} \hat{p}.$$

Stała ω ma wymiar częstości, a m jest parametrem wymiarze masy.