Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 4

23.3.2021. wtorek - grupa 2
24.3.2021. środa - grupa 1

Suma punktów 21. Oceny[1]:
[0 – 11] - 2, (11 – 13] - 3, (13 – 15] - 3.5, (15 – 17] - 4, (17 – 19] - 4.5, (19– 21] - 5

1. (3 pkt.) W reprezentacji położeniowej element macierzowy operatora $\hat{O}$ daje się zapisać jako

$$\langle\varphi|\,\hat{O}\,|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\varphi^*(x)\left[\hat{O}\psi(x)\right].$$

Na wykładzie zdefiniowaliśmy sprzężenie hermitowskie operatora $\hat{O}$, oznaczane $\hat{O}^\dagger$, jako

$$\langle\varphi|\,\hat{O}^\dagger\,|\psi\rangle^* = \langle\psi|\,\hat{O}\,|\varphi\rangle\,.$$

Lewa strona tej równości daje się zapisać

$$\langle\varphi|\,\hat{O}^\dagger\,|\psi\rangle^* = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\left[\hat{O}^\dagger\psi(x)\right]^*\,\varphi(x).$$

Jeżeli zachodzi $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$, czyli $\langle\varphi|\,\hat{O}\,|\psi\rangle = \langle\varphi|\,\hat{O}^\dagger\,|\psi\rangle$ to operator nazywamy hermitowskim. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem czy operatory

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx},\ \hat{x} = x,\ \frac{d}{dx}$$

są hermitowskie.

2. (2 pkt.) Sprawdzić, czy iloczyn operatorów hermitowskich jest operatorem hermitowskim.

3. (4 pkt.) Czy dla operatorów pędu i położenia istnieje takie przedstawienie, że oba te operatory są dane jako macierze kwadratowe o tym samym wymiarze (skończonym, bądź nieskończonym)?

4. (3 pkt.) Rozwiązać równanie własne dla operatora energii

$$\hat{H}\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

gdzie operator Hamiltona ma postać

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

[1] $(x$ lub $x)$ oznacza bez x, $[x$ lub $x]$ oznacza łącznie z x.

a E jest wartością własną. Rozważyć ($a > 0$):

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla} \quad x < -a \\ 0 & \text{dla} \quad -a \leq x \leq a \\ \infty & \text{dla} \quad a < x. \end{cases}$$

5. (4 pkt.) Rozwiązać poprzednie zadanie dla potencjału ($V_0 > 0$, $a > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq a \\ V_0 & \text{dla} \quad a < x. \end{cases}$$

dla przypadku kiedy $E < V_0$.

6. (5 pkt.) Rozwiązać poprzednie zadanie dla potencjału ($V_0 > 0$, $a > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{dla} \quad x < -a \\ 0 & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq a \\ V_0 & \text{dla} \quad a < x. \end{cases}$$

dla przypadku kiedy $E < V_0$.

Uwagi do zadań 4 – 6.

Funkcje falowe będące rozwiązaniem równania Schrödingera dla nieosobliwych potencjałów powinny być ciągłe i mieć ciągłą pochodną. Ponieważ dyskutowane potencjały są kawałkami stałe, rozwiązaniami są bądź fale płaskie, bądź eksponenty. Celem zadań jest pokazanie, że dozwolone są tylko ściśle określone wartości E – energia jest skwantowana. Otrzymanie warunków na energię polega na poprawnym nałożeniu warunków brzegowych na f. falową w $x = \pm\infty$ (funkcja powinna znikać) oraz w drugim i trzecim przypadku na poprawnym „zszyciu" rozwiązań w różnych obszarach x. Dla potencjałów osobliwych w obszarze nieskończonego potencjału f. falowa powinna tożsamościowo znikać i powinna w ciągły sposób zszywać się z funkcją falową w obszarze skończonego potencjału. Ciągłość pochodnej nie jest wymagana. Polecam skonsultowanie się z dowolnym podręcznikiem mechaniki kwantowej.