Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 2

9.3.2021. wtorek - grupa 2
10.3.2021. środa - grupa 1

Suma punktów 20. Oceny[1]:
[0 – 10] - 2, (10 – 12] - 3, (12 – 14] - 3.5, (14 – 16] - 4, (16 – 18] - 4.5, (18– 20] - 5

1. (2 pkt.) Dystrybucję („funkcję”) delta Diraca można zdefiniować jako granicę ciągu funkcyjnego $f_\varepsilon(x)$
$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x).$$
Dystrybucja ta ma własność
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(x) \overset{\text{df}}{=} f(0).$$
Wykazać, że następującu ciąg funkcyjne zdążają w granicy do $\delta(x)$:
$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \to \infty} \int\limits_{-R}^{R} dk\, e^{ikx}.$$
We wszystkich przypadkach wykonać wykresy funkcji $f_\varepsilon(x)$ dla kilku wartości ε.

2. (2 pkt.) Wykazać, że „schodkowa” funkcja Θ daje się zapisać jako całka
$$\Theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega\tau}.$$

3. (2 pkt.) Korzystając z tej reprezentacji całkowej wykazać, że
$$\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau).$$

4. (2 pkt.) Pokazać, że
$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{1}{|f'(x_i)|}\, \delta(x - x_i)$$
gdzie punkty x_i są zerami funkcji $f(x)$. Zastosować powyższe twierdzenie do
$$\delta(x^2 - \alpha^2).$$

[1] $(x$ lub $x)$ oznacza bez x, $[x$ lub $x]$ oznacza łącznie z x.

5. (3 pkt.) W mechanice kwantowej wielkościom fizycznym, które są obserwowalne (obserwablom) przyporządkowujemy operatory. Położeniu i pędowi (w jednym wymiarze) odpowiadają następujące operatory (oznaczone „daszkiem”):

$$x \to \hat{x} = x, \ p \to \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

które działają na amplitudy prawdopodobieństwa (czyli funkcje zespolone zmiennej x). Korzystając z podanej postaci tych operatorów obliczyć ich komutator

$$[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\,\hat{p} - \hat{p}\,\hat{x} = ?.$$

UWAGA: Obliczając ten komutator należy pamiętać, że jest on operatorem i działa domyślnie na jakąś funkcję $\psi(x)$. Należy zatem obliczyć

$$[\hat{x}, \hat{p}]\,\psi(x),$$

a potem opuścić ψ.

Jak uogólnia się ten wzór na przypadek trójwymiarowy $(i, j = 1, 2, 3)$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = ?,$$

gdzie $\hat{x}_{1,2,3} = x, y, z$ oraz $p_{1,2,3} = -i\hbar\partial/\partial_x, -i\hbar\partial/\partial_y, -i\hbar\partial/\partial_y$? W tym przypadku $\psi = \psi(x, y, z)$.

6. (2 pkt.) Udowodnić

$$\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}.$$

7. (3 pkt.) Operatory momentu pędu definiujemy jako

$$\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk}\hat{r}_j\hat{p}_k.$$

Korzystając z poprzedniego zadania proszę obliczyć komutatory

$$\left[\hat{p}_i, \hat{L}_k\right] = ?, \ \left[\hat{x}_i, \hat{L}_k\right] = ?.$$

8. (4 pkt.) Obliczyć komutator

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_k\right] = ?.$$