Wykład 4 Mechanika Kwantowa

23.3.2021

POSTULATY:

1. Stany fizycznych $|\psi\rangle$ - przestrzeń Hilberta
2. Observable - op. hermitowskie
3. Pomiar - kolaps f. falowej
4. Ewolucja czasowa $|\psi(x,t)\rangle$ - r. Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x,t)\rangle = \hat{H} |\psi(x,t)\rangle$$

OSTATNIO $[\hat{A},\hat{B}]=0 \rightsquigarrow$ mają wspólną bazę st. własnych

$$\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \qquad B|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle$$

PYTANIE $[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$

Musi istnieć transf.

$$\boxed{|b_i\rangle = \sum_j |a_j\rangle U_{ji}}$$

$$\langle a_k|b_i\rangle = U_{ki}$$

$$\langle a_k|a_j\rangle = \delta_{kj}$$

Macierz

$$A^{(b)}_{ik} = \langle b_i|\hat{A}|b_k\rangle = \sum_{jl} U^{+}_{il} \langle a_l|\hat{A}|a_j\rangle U_{jk}$$

$$= \sum_{lj} U^{+}_{il} A^{(a)}_{lj} U_{jk} = (U^{+}A^{(a)}U)_{ik}$$

To jest prawda dla wszystkich op.

$$Q^{(b)}_{ik} = (U^{+}Q^{(a)}U)_{ik} \leftarrow$$

macierz unitarna

Dany jest stan $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_i |b_i\rangle \beta^{\psi}_i = \sum_i |a_i\rangle \alpha^{\psi}_i$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} |a_j\rangle \underbrace{U_{ji}\,\beta^{\psi}_i} = \sum_j |a_j\rangle \underbrace{\alpha^{\psi}_j}$$

$$\alpha^{\psi}_j = \sum_i U_{ji}\beta^{\psi}_i \leftarrow \text{mnożenie } U\vec{\beta}^{\psi}$$

Łatwo pokazać

$$\vec{\beta}_\psi^{\,+} Q^{(b)} \vec{\beta}_\psi = \vec{\alpha}_\psi^{\,+} Q^{(a)} \vec{\alpha}_\psi$$

Takie formy biliniowe są niezmiennicze ze względu na zmianę bazy.

Baza położeniowa: $|x\rangle$:

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$$

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x'-x) \qquad \hat{1} = \int dx\, |x\rangle\langle x|$$

Dowolny stan można rozłożyć w bazie $|x\rangle$

$$|\psi\rangle = \int dx\, |x\rangle \underbrace{\langle x|\psi\rangle} \qquad \langle x|\psi\rangle = \psi(x)$$

f. falowa

$\psi(x)$ – ampl. prawd., że w wyniku pomiaru położenia na stanie $|\psi\rangle$ otrzymujemy wartość x

Iloczyn skalarny:

$$\langle \varphi|\psi\rangle = \int dx\, \langle \varphi|x\rangle\langle x|\psi\rangle =$$

$$\uparrow_{\hat{1}} \qquad = \int dx\, \varphi^*(x)\,\psi(x)$$

$$\langle \varphi|x\rangle = \langle x|\varphi\rangle^*$$

postulat

Norma

$$\langle \psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1$$

f. falowe powinny być całkowalne „w kwadracie".

Baza pędowa:

W bazie położeniowej

$$\boxed{\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$$

$$\hat{p}_x u_p(x) = p\, u_p(x)$$

$$u_p(x) = A\, e^{i\frac{px}{\hbar}}$$

Norma: $\int dx \, |u_p(x)|^2 = \infty$ $\qquad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

$$\int u^*_{p'}(x)\, u_p(x) = 2\pi\hbar\, |A|^2\, \delta(p'-p)$$

Stany własne $|p\rangle$

$$\langle p'|p\rangle = \delta(p'-p) \qquad \mathbb{1} = \int dp\, |p\rangle\langle p|$$

Rozłóżmy stan $|p\rangle$ w bazie x:

$$|p\rangle = \int dx\, |x\rangle \underbrace{\langle x|p\rangle}_{u_p(x)}$$ ← transformacja od bazy $|x\rangle$ do bazy $|p\rangle$

Każdy stan $|\psi\rangle$ może rozłożyć w bazie $|p\rangle$

$$|\psi\rangle = \int dp\, |p\rangle \underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\tilde{\psi}(p)}$$ ← to jest tr. Fouriera

Rozłóżmy stan $|\psi\rangle$ w bazie $|x\rangle$

$$|\psi\rangle = \int dx'\, |x'\rangle\, \psi(x') = \int dx' \int dp\, |p\rangle\langle p|x'\rangle\, \psi(x').$$

$$\langle p|x'\rangle = \langle x'|p\rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-i\frac{px'}{\hbar}}$$

$$\ldots = \int dp\, |p\rangle \underbrace{\int dx'\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-i\frac{px'}{\hbar}}\, \psi(x')}_{\tilde{\psi}(p)}$$

Zmiana bazy

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$$

Rozpiszmy

$$\int dx'\, \langle x|\hat{p}|x'\rangle\langle x'|\psi\rangle$$

$$\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = \int dx\, \langle x|\hat{p}|x'\rangle \underbrace{\langle x'|\psi\rangle}_{\psi(x')}$$

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = \delta(x-x')\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

Inne wyprowadzenie

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = \int dp\, \langle x|\underbrace{\hat{p}|p\rangle}_{p|p\rangle}\langle p|x'\rangle =$$

$$= \int dp\cdot p\,\frac{1}{2\pi\hbar}\, e^{ip(x-x')/\hbar} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp\; i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\, e^{ip(x-x')/\hbar}$$

domyśli $\psi(x')$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\int \underbrace{dp\, e^{ip(x-x')/\hbar}}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x'}\right)$$

$$= \delta(x-x')\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = \int dx\, \langle p|\underbrace{\hat{x}|x\rangle}_{x|x\rangle}\langle x|\psi\rangle =$$

$$= \int dx\; x\, \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

$$= \int dx\,dp'\, x\,\underbrace{\langle p|x\rangle\langle x|p'\rangle}_{\frac{1}{2\pi\hbar}e^{ix(p'-p)/\hbar}}\,\langle p'|\psi\rangle$$

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\, e^{ix(p'-p)/\hbar}\underbrace{\langle p'|\psi\rangle}_{\tilde{\psi}(p')}$$

$$x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\, e^{ix(p'-p)/\hbar}$$

$$= \int dx\,\frac{1}{2\pi\hbar}\, e^{ix(p'-p)/\hbar}\left(+i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\right)\tilde{\psi}(p') = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}($$

$$= \int \ldots \frac{\ldots}{2\pi\hbar} \ldots \left(\ldots \frac{\partial}{\partial p'} \right) \ldots dp$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\delta(p'-p)}$$

ZASADA NIEOZNACZONOŚCI

Gaussowski pakiet falowy:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\psi}(k)\, e^{ikx}$$

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{(k-k_0)^2}{2\alpha}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\psi}(k)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{\alpha}}\, dk = 1$$

Obliczymy $\psi(x)$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\alpha}} \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\alpha} + ikx} = \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\pi}}\, e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$$

Szkic rachunku

$$-\frac{(k-k_0)^2}{2\alpha} + ikx = -\frac{1}{2\alpha}\left[(k-k_0)^2 - 2\alpha i k\cdot x\right]$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\Big[\underbrace{(k-k_0)^2 - 2\alpha i(k-k_0)\cdot x - \alpha^2 x^2}_{\text{"nowa zmienna" } \frac{k'^2}{-2\alpha}}\Big]$$

$$-\frac{1}{2}\alpha x^2 + ik_0 x$$

$$\langle p\rangle = \int dp\, p\, |\tilde{\psi}(p)|^2 = \hbar k_0$$

$$\int dp\, (p - \langle p\rangle)^2\, |\tilde{\psi}(p)|^2 = \hbar^2 \frac{\alpha}{2} = \sigma^2(p$$

$$\langle x \rangle = \int dx\, x\, |\psi(x)|^2 = 0 \qquad \overset{\hbar k_0}{\shortparallel}$$

$$\sigma^2(x) = \underset{\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{(x - \langle x \rangle)^2}}{\underset{\shortparallel}{\int dx\, x^2}} |\psi(x)|^2 = \frac{1}{2\alpha} \Leftarrow$$

$$\sigma_\psi^2(p)\, \sigma_\psi^2(x) = \hbar^2 \frac{\alpha}{2} \frac{1}{2\alpha} = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\boxed{\sigma_\psi(p)\, \sigma_\psi(x) = \frac{\hbar}{2}}$$ zasada nieoznaczoności Heisenberga.

Czy to jest ogólne?

$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ $\quad$ $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ – op. hermitowskie

$|\psi\rangle$ – dowolne.

$a = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

$b = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle$

$\hat{\delta}_A = \hat{A} - a \qquad \hat{\delta}_B = \hat{B} - b$

$$[\hat{\delta}_A, \hat{\delta}_B] = i\hat{C}$$

Rozważmy całkę $I(\alpha) = \int d^3\vec{r}\, |(\alpha\hat{\delta}_A - i\hat{\delta}_B)\psi|$

$I(\alpha) \geqslant 0$

$$I(\alpha) = \int d^3\vec{r} \left[(\alpha\hat{\delta}_A - i\hat{\delta}_B)\psi\right]^* \left[(\alpha\hat{\delta}_A - i\hat{\delta}_B)\psi\right]$$

$$= \int d^3\vec{r}\, \psi^* \underbrace{(\alpha\hat{\delta}_A + i\hat{\delta}_B)(\alpha\hat{\delta}_A - i\hat{\delta}_B)}_{\alpha^2\hat{\delta}_A^2 + \hat{\delta}_B^2 + \alpha\hat{C}} \psi$$

$$= \alpha^2 \sigma_\psi^2(A) + \sigma_\psi^2(B) + \alpha \langle \hat{C} \rangle_\psi \geq 0$$

Wyznacznik r. kwadratowego na $\alpha \in \mathbb{R}$ jest ujemny lub zero

$$\Delta = \langle C \rangle_\psi^2 - 4 \sigma_\psi^2(A) \sigma_\psi^2(B) \leq 0$$

$$\sigma_\psi^2(A) \sigma_\psi^2(B) \geq \frac{\langle C \rangle_\psi^2}{4}$$ dla każdego ψ

dla $\hat{A} = \hat{x}$, $B = \hat{p} \rightarrow \hat{C} = \hbar$

Gaussian minimalizuje zasadę nieozn.