wykład 3. 16.3.2021

POSTULATY MECHANIKI KWANTOWEJ

1) STANY KWANTOWE ~ WEKTORY w. PRZESTRZENI

NOTACJA DIRAKA: $|\psi\rangle$ – ket $\quad \underline{|\psi\rangle \in V}$

JEŻELI $|\psi_{1,2}\rangle \in V \rightarrow \underline{|\psi_3\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle}$

ZASADA SUPERPOZYCJI

$\alpha \in \mathbb{C}$ (zespolone) $\quad |\psi'\rangle = \alpha|\psi\rangle \in V$

stany $|\psi\rangle$ i $\alpha|\psi\rangle$ są równoważne.

PRZESTRZEŃ SPRZĘŻONA V' WEKTORY PRZESTRZENI V

$\langle\psi| \in V'$ ← bra

Wyobraźmy sobie, że $\quad |\psi\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$\langle\psi| \leftrightarrow [a_1^* \ldots\ldots a_n^*]$

$$\underbrace{\alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle}_{\in V} \longrightarrow \underbrace{\alpha_1^*\langle\psi_1| + \alpha_2^*\langle\psi_2|}_{\in V'}$$

ILOCZYN WEWNĘTRZNY (SKALARNY)

liczba zesp. $\in \mathbb{C}$ $= \langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^*$

$\langle\psi|\psi\rangle$ = RZECZYWISTE $\in \mathbb{R}$

$\langle\psi|\psi\rangle \geqslant 0 \quad = 0$ tylko gdy $|\psi\rangle$ jest ketem zerowym.

Dla stanów fizycznych $\langle\psi|\psi\rangle > 0$

$$|\psi\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}}|\psi\rangle \rightarrow \langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = 1$$

STAN W PRZ. HILB. DA SIĘ ZNORMALIZOWAĆ.

ORTOGONALNOŚĆ $\langle\psi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle = 0$

to stany te nazywamy ortogonalnymi.

Przestrzeń V jest zupełna.

2. KAŻDEJ WIELKOŚCI FIZYCZNEJ (MIERZALNEJ) CZYLI OBSERWABLI ODPOWIADA PEWIEN OPERATOR HERMITOWSKI NA V.

OPERATOR $\hat{Q}$ ODWZOROWUJE $V \to V$

$$\hat{Q}|\psi\rangle = |\varphi\rangle$$

DWA OPERATORY SĄ RÓWNE:

$$\hat{Q}_1|\psi\rangle = \hat{Q}_2|\psi\rangle \quad \forall \psi \in \underline{D} \subset V$$

D – dziedzina operatora.

PRZYKŁAD: $\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t} = \hat{E} \qquad \hat{H} = -\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$

W MK OGRANICZAMY SIĘ DO OP. LINIOWYCH

$$\hat{Q}(c_1|\psi\rangle + c_2|\psi_2\rangle) = \underline{c_1}\hat{Q}|\psi_1\rangle + \underline{c_2}\hat{Q}|\psi_2\rangle$$

$$(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2)|\psi\rangle = \hat{Q}_1|\psi\rangle + \hat{Q}_2|\psi\rangle$$

$$(c\hat{Q})|\psi\rangle = c\hat{Q}|\psi\rangle$$

Mnożenie op. $\quad (\hat{Q}_1 \cdot \hat{Q}_2)|\psi\rangle = \hat{Q}_1(\hat{Q}_2|\psi\rangle) \Leftarrow$

WSPÓLNA DZIEDZINA

NA OGÓŁ $\quad \hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

$\underline{\hat{Q}|\psi\rangle = |\varphi\rangle}$ $\quad$ W przestrzeni V' $\quad \langle\varphi| = \langle\psi|\hat{Q}^+$

def.

OPERATOR HERMITOWSKI $\quad \hat{Q} = \hat{Q}^+$

SPRZĘŻENIE ILOCZYNU $\quad \boxed{(\hat{Q}_1\hat{Q}_2)^+ = Q_2^+ Q_1^+}$

$$(\hat{Q}_1\hat{Q}_2)|\psi\rangle = \hat{Q}_1(\underbrace{\hat{Q}_2|\psi\rangle}_{|\chi\rangle}) = \hat{Q}_1|\varphi\rangle$$

V' $\quad \langle\varphi|\hat{Q}_1^+ = (\langle\psi|Q_2^+)Q_1^+ = \langle\psi|(\hat{Q}_2^+ Q_1^+)$

ILOCZYN ZEWN. $\hat{X} = |\alpha\rangle\langle\beta|$ ← op.

$$\hat{X}|\psi\rangle = |\alpha\rangle\underbrace{\langle\beta|\psi\rangle}_{\text{liczba } \mathbb{C}} = c|\alpha\rangle \qquad V$$

$$\langle\psi|\hat{X} = \langle\psi|\alpha\rangle\langle\beta| = a\langle\beta| \qquad V'$$

MOŻNA POKAZAĆ, ŻE $\hat{X}^+ = |\beta\rangle\langle\alpha|$

„Elementy macierzowe" op. $\hat{Q}$ $\qquad \langle\varphi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\varphi\rangle$

$Q_{\beta\alpha} = \langle\beta|\hat{Q}|\alpha\rangle$ ~ liczba zesp.

$$= \langle\beta|\{\hat{Q}|\alpha\rangle\} = \{\underbrace{\langle\alpha|}_{V'}\hat{Q}^+\}|\beta\rangle^* = (Q^+)^*_{\alpha\beta}$$

$$Q^+_{\alpha\beta} = Q^*_{\beta\alpha}$$ ← wygląda jak spr. herm. macierzy.

STANY WŁASNE

$$\hat{Q}|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle$$

{ WIDMO DYSKRETNE LUB CIĄGŁE }

$$\hat{Q}|\psi\rangle = q_i|\psi\rangle$$

↑ wartość własna $\in \mathbb{C}$

↑ nazywamy stany poprzez wartości własne

$$|\psi\rangle \to |\psi_{q_i}\rangle = |q_i\rangle$$

WARTOŚCI WŁASNE OP. HERMITOWSKICH SĄ RZECZYWISTE.

$\hat{A} = \hat{A}^+$ ← def. hermitowskości $\qquad a_i = a_k, \; i \neq k$

$$\langle a_j| \quad \hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

$$\langle a_i|\hat{A}^+ = \langle a_i|\hat{A}^+ = a_i^*\langle a_i| \qquad |a_i\rangle$$

$$L = \langle a_j|\hat{A}|a_i\rangle - \langle a_j|\hat{A}|a_i\rangle = 0$$

$$P = (a_i - a_j^*)\langle a_j|a_i\rangle = 0$$

$\hookrightarrow$ $i \neq j$ $\quad (a_i - a_j^*) \neq 0 \longrightarrow \underline{\langle a_j|a_i\rangle = 0}$

$\hookrightarrow$ $i = j$ $\quad (a_i - a_i^*)\underbrace{\langle a_i|a_i\rangle}_{=1} = 0$

$$a_i = a_i^*$$

Wartości własne op. hermitowskich są rzeczywiste, a wektory własne do różnych wartości własnych są ortogonalne. (ortonormalne)

$\hookrightarrow$ $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$

Stany własne op. hermitowskiego mogą być wzięte jako baza w przestrzeni V. Dowolny stan $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$$

c_i $\hookrightarrow$ liczby zesp.

Jak obliczyć c_i?

$$\langle a_j|\alpha\rangle = \sum_i c_i \underbrace{\langle a_j|a_i\rangle}_{\delta_{ij}} = c_j$$

OPERATOR JEDNOSTKOWY:

$$\mathbb{1} = \sum_j |a_j\rangle\langle a_j|$$

$$|\alpha\rangle = \mathbb{1}|\alpha\rangle = \sum_j |a_j\rangle \underbrace{\langle a_j|\alpha\rangle}_{c_j} = \sum_j c_j |a_j\rangle =$$

$$\underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_{=1} = \sum_{i,j} \langle a_j| c_j^* c_i |a_i\rangle = \sum_i |c_i|^2 = 1$$

Normalizacja stanu $|\alpha\rangle$ sprowadza się do warunku

Reprezentacja macierzowa operatora:

$$\langle a_i|\hat{Q}|a_j\rangle = Q_{ij}$$

← dla op. hermitowskiej to jest macierz hermitowska

$$\hat{Q}|\psi\rangle = |\varphi\rangle \leftarrow$$

$$|\psi\rangle = \sum c_i |a_i\rangle \longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \longleftrightarrow |\psi\rangle$$

$$|\varphi\rangle = \sum f_i |a_i\rangle \longrightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \longleftrightarrow |\varphi\rangle$$

$$\langle a_j|\hat{Q}|\psi\rangle = f_j$$

$$\hookrightarrow \sum_i \underbrace{\langle a_j|\hat{Q}|a_i\rangle}_{Q_{ji}} \underbrace{\langle a_i|\psi\rangle}_{c_i}$$

$$\sum_i Q_{ji} c_i = f_j$$

↑ mnożenie macierzowe.

JEŻELI OPERATORY KOMUTUJĄ TO MAJĄ WSPÓLNY ZESPÓŁ WEKTORÓW WŁASNYCH.

$$\hat{A}|a_i\rangle = a_i |a_i\rangle \qquad \hat{B}|b_i\rangle = b_i |b_i\rangle$$

$$|b_i\rangle = \sum_k \alpha_{ik} |a_k\rangle$$

$$\hat{A}\hat{B}|b_i\rangle =$$

$$= b_i \hat{A}|b_i\rangle = b_i \sum_k \alpha_{ik} a_k |a_k\rangle = b_i |\psi\rangle$$

$$\hat{B}\hat{A}|b_i\rangle = \hat{B} \sum_k \alpha_{ik} a_k |a_k\rangle = \hat{B}|\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle = c|b_i\rangle = \sum_k \alpha_{ik}\, a_k |a_k\rangle =$$

$$= c\sum_k \alpha_{ik} |a_k\rangle$$

Rozw. $\alpha_{ik} \cdot a_k = c\,\alpha_{ik}$

$$\alpha_{ik} = \delta_{ik} \frac{c}{a_k}$$

$\boxed{|b_i\rangle = c|a_i\rangle}$ $c=1$ z normalizacji.

Stany kwantowe opisywane są przy pomocy zespołu wszystkich komutujących ze sobą op. hermitowskich.

3. Jeżeli układ jest w stanie $|\psi(t)\rangle$ pomiar obserwabli $\hat{Q}$ daje jedną z możliwych wartości własnych. z prawd. $|\langle q_i|\psi(t)\rangle|^2$ Następny pomiar $\hat{Q}$ musi dać znowu q_i ale z praw. 1

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i |q_i\rangle \longrightarrow |q_i\rangle \;\_\_\_\_ \quad \ldots$$

pomiar q_i

pomiar q_i

kolaps f. falowej.