27 Równanie Diraka

27.1 Równanie Kleina-Gordona dla cząstki swobodnej

Równanie Schrödingera jest w rzeczywistości operatorowym zapisem klasycznego związku

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{27.1}$$

gdzie pęd i energię zatępujemy operatorami

$$\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla},\ E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{27.2}$$

Najprostsze uogólnienie tej procedury na przypadek relatywistyczny, polega na użyciu (27.2) we wzorze relatywistycznym

$$E^2 = c^2\boldsymbol{p}^2 + m^2c^4, \tag{27.3}$$

co daje równanie zwane dziś równaniem Kleina-Gordona

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \left(-\hbar^2c^2\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2c^4\right)\varphi. \tag{27.4}$$

Równanie to dopuszcza rozwiązania w postaci fali płaskiej

$$\varphi = e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{27.5}$$

gdzie

$$E = \hbar\omega = \pm\sqrt{\hbar^2c^2k^2 + m^2c^4} \tag{27.6}$$

Jak widać pojawiają się rozwiązania o ujemnej energii, których interpretacja nie jest jasna (antycząstki).

Wyprowadźmy teraz równanie ciągłości (poprzez analogię do równania Schrödingera). W przypadku nierelatywistycznym mieliśmy

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} = 0 \tag{27.7}$$

gdzie

$$P = \psi^*\psi,\ \boldsymbol{S} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\,\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\,\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right) \tag{27.8}$$

Odejmijmy stronami równania

$$\begin{aligned}-\hbar^2\varphi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi &= \varphi^*\left(-\hbar^2c^2\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2c^4\right)\varphi\\ -\hbar^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^* &= \varphi\left(-\hbar^2c^2\boldsymbol{\nabla}^2 + m^2c^4\right)\varphi^*\end{aligned} \tag{27.9}$$

$$\left[\varphi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^*\right] = c^2\left[\varphi^* \boldsymbol{\nabla}^2\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}^2\varphi^*\right]. \tag{27.10}$$

Przepisując te równania jako

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right] = c^2\boldsymbol{\nabla}\left[\varphi^*\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi^*\right] \tag{27.11}$$

widzimy, że gęstość prądu jest identyczna jak w przypadku nierelatywisycznym

$$\boldsymbol{S} = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\varphi^*\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\varphi^*\right] \tag{27.12}$$

natomiast odpowiednik gęstości prawdopodobieństwa jest wówczas dany jako

$$P = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left[\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right]. \tag{27.13}$$

Tak zdefiniowane P nie jest dodatnio określone, nie można go więc zinterpretować jako gęstości prawdopodobieństwa (po pomnożeniu przez e możnaby jako gęstość ładunku). Jest to związane z tym, że równanie (27.4) jest drugiego rzędu w pochodnych po czasie.

27.2 Równanie Diraka dla cząstki swobodnej

Dirac zaproponował użycie związku liniowego, kosztem wprowadzenia niekomutujących, bezwymiarowych obiektów $\boldsymbol{\alpha}$ i β (macierze):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2\right)\psi. \tag{27.14}$$

Podnosząc (operatorowo) równanie (27.14) do kwadratu powinişmy dostać równanie (27.4):

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2\right)\left(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2\right)\psi. \tag{27.15}$$

Rozpiszmy prawą stronę

$$\begin{aligned} &c^2\alpha_i\alpha_j p_i p_j + mc^3\left(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j\right) + m^2c^4\beta^2 \\ &= c^2\frac{1}{2}\left(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i\right)p_ip_j + mc^3\left(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j\right) + m^2c^4\beta^2. \end{aligned} \tag{27.16}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że operator p_ip_j jest symetryczny w indeksach ij. Porównując z (27.4) lub z (27.3) mamy

$$\begin{aligned} \left(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i\right) &= 2\delta_{ij}, \\ \left(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j\right) &= 0, \\ \beta^2 &= 1. \end{aligned} \tag{27.17}$$

Znalezienie rozwiązań równań (27.17) dyskutowane jest w literaturze, tu podamy jedynie ostateczne rozwiązanie. Okazuje się, że najniższy możliwy wymiar macierzy α_i i β jest 4 i mają one postać

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{27.18}$$

gdzie σ_i są macierazmi Pauliego:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{27.19}$$

Sprawdźmy

$$\begin{aligned}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{27.20}$$

Pamiętając, że

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{27.21}$$

dostajemy pierwszą z równości (27.17). Z kolei

$$\begin{aligned}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j) &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} = 0.\end{aligned} \tag{27.22}$$

Wreszcie

$$\beta^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1. \tag{27.23}$$

Oczywiście wybór (27.18) nie jest jednoznaczny. Macierze unitarne równoważne

$$\alpha_i' = U^\dagger\alpha_i U,\ \beta' = U^\dagger\beta U \tag{27.24}$$

także spełniają związki (27.17). Reprezentację macierzy α_i i β daną wzorami (27.18) nazywamy reprezentacją Bjorkena.

Mamy zatem równanie liniowe w pochodnej czasowej, ale funkcja falowa jest czterowymiarowym spinorem. Rozwiązanie swobodnego równania Diraka zapisujemy w postaci fali płaskiej

$$\psi(t, \boldsymbol{r}) = e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar}u \tag{27.25}$$

gdzie u jest czterowymiarowym (wektorem) spinorem

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \tag{27.26}$$