17 Współczynniki Clebscha-Gordana

17.1 Definicja

Rozważmy układ składający się z dwóch podsystemów zależnych od różnych zmiennych. Najprościej wyobrazić sobie taki system jako układ dwóch elektronów, poruszających się w potencjale sferycznie symetrycznym, których wzajemne oddziaływanie zaniedbujemy. Wówczas funkcja falowa każdego z elektronów daje się rozseparować na części radialną i kątową, przy czym części kątowe zależeć będą odpowiednio od kątów θ_1, φ_1 i θ_2, φ_2 . Jest oczywiste, że operatory orbitalnego momentu pędu dla pierwszego elektronu $\hat{L}_k^{(1)}$ i dla drugiego $\hat{L}_k^{(2)}$ komutują

$$\left[\hat{L}_k^{(1)}, \hat{L}_m^{(2)}\right] = 0,$$

gdyż są to operatory różniczkowe działające na różne zmienne. Spróbujmy odpowiedzieć na pytanie: jak wyglądają stany własne operatora sumarycznego momentu pędu $\hat{L}_k = \hat{L}_k^{(1)} + \hat{L}_k^{(2)}$. Jak się okaże, nasze rozważania będą całkowicie ogólne i pozostaną słuszne także dla krętów ułamkowych. Rozpatrzmy zatem dwa opeartory $\hat{J}_k^{(1,2)}$ działające w 2 różnych przestrzeniach

$$\begin{aligned} \hat{J}^{(1)^2} \left|j_1, m_1\right\rangle = j_1(j_1+1) \left|j_1, m_1\right\rangle, \quad \hat{J}^{(2)^2} \left|j_2, m_2\right\rangle = j_2(j_2+1) \left|j_2, m_2\right\rangle, \\ \hat{J}_3^{(1)} \left|j_1, m_1\right\rangle = m_1 \left|j_1, m_1\right\rangle, \quad \hat{J}_3^{(2)} \left|j_2, m_2\right\rangle = m_2 \left|j_2, m_2\right\rangle, \end{aligned} \tag{17.1}$$

gdzie dla ułatwienia przyjęliśmy układ jednostek, w których $\hbar = 1$, lub – jak kto woli – przeskalowaliśmy operatory $\hat{J}_k \to \hat{J}_k/\hbar$. Stąd relacje komutacji przyjmują postać

$$\left[\hat{J}_k^{(1,2)}, \hat{J}_m^{(1,2)}\right] = i\epsilon_{kmn}\hat{J}_n^{(1,2)}, \quad \left[\hat{J}_k^{(1)}, \hat{J}_m^{(2)}\right] = 0. \tag{17.2}$$

Operator całkowitego momentu pędu jest sumą

$$\hat{J}_k = \hat{J}_k^{(1)} \circ 1^{(2)} + 1^{(1)} \circ \hat{J}_k^{(2)}, \tag{17.3}$$

gdzie przez $1^{(1,2)}$ oznaczyliśmy operator jednostkowy działający odpowiednio w pierwszej lub drugiej przestrzeni. Poniżej będziemy opuszczać operatory jednostkowe, gdyż upraszcza to znacznie notację. Naszym zadaniem będzie skonstruowanie stanów własnych $|j, m\rangle$ operatora $\hat{J}^2$ i $\hat{J}_3$ ze stanów $|j_1, m_1\rangle$ i $|j_2, m_2\rangle$. Z postaci operatora (17.3) widać, że stanami własnymi operatora $\hat{J}_3$ będą stany *iloczynowe* $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$. Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 \left|j_1, m_1\right\rangle \left|j_2, m_2\right\rangle &= \hat{J}_3^{(1)} \left|j_1, m_1\right\rangle \circ 1^{(2)} \left|j_2, m_2\right\rangle + 1^{(1)} \left|j_1, m_1\right\rangle \circ \hat{J}_3^{(2)} \left|j_2, m_2\right\rangle \\ &= (m_1+m_2) \left|j_1, m_1\right\rangle \left|j_2, m_2\right\rangle. \end{aligned} \tag{17.4}$$

Powstaje pytanie: czy stany te są stanami własnymi $\hat{J}^2$? Okazuje się że nie. Aby to wykazać zapiszmy $\hat{J}^2$ jako

$$\begin{aligned}
\hat{J}^2 &= \frac{1}{2}\hat{J}_+\hat{J}_- + \frac{1}{2}\hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_3^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(J_+^{(1)} + J_+^{(2)}\right)\left(J_-^{(1)} + J_-^{(2)}\right) + \frac{1}{2}\left(J_-^{(1)} + J_-^{(2)}\right)\left(J_+^{(1)} + J_+^{(2)}\right) + \left(J_3^{(1)} + J_3^{(2)}\right)^2 \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\left(J_+^{(1)}J_-^{(1)} + J_-^{(1)}J_+^{(1)}\right) + J_3^{(1)\,2}}_{=\hat{J}^{(1)\,2}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(J_+^{(2)}J_-^{(2)} + J_-^{(2)}J_+^{(2)}\right) + J_3^{(2)\,2}}_{=\hat{J}^{(2)\,2}} + 2J_3^{(1)}J_3^{(2)} \\
&+ J_+^{(1)}J_-^{(2)} + J_-^{(1)}J_+^{(2)} \qquad (17.5)
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że $J_k^{(1)}$ i $J_m^{(2)}$ komutują. Wyliczmy teraz działanie poszczególnych składników sumy (17.5) na stan iloczynowy $|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle$. Trzy pierwsze wyrazy ze wzoru (17.5) dają trywialnie:

$$(j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2m_1m_2)\,|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle$$

Z kolei

$$\begin{aligned}
&\hat{J}_+^{(1)}\hat{J}_-^{(2)}\,|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle \\
&= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)}\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)}\,|j_1, m_1+1\rangle\,|j_2, m_2-1\rangle\,, \qquad (17.6) \\
&\hat{J}_-^{(1)}\hat{J}_+^{(2)}\,|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle \\
&= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)}\,|j_1, m_1-1\rangle\,|j_2, m_2+1\rangle \qquad (17.7)
\end{aligned}$$

Zatem w sumie otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\hat{J}^2\,|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle \qquad (17.8) \\
&= (j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2m_1m_2)\,|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle \\
&+ \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)}\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)}\,|j_1, m_1+1\rangle\,|j_2, m_2-1\rangle \\
&+ \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)}\,|j_1, m_1-1\rangle\,|j_2, m_2+1\rangle\,.
\end{aligned}$$

Widzimy zatem, że w ogólności w wyniku działania operatora $\hat{J}^2$ na stan iloczynowy $|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle$ dostajemy nowe stany, mianowicie $|j_1, m_1+1\rangle\,|j_2, m_2-1\rangle$ i $|j_1, m_1-1\rangle$ $|j_2, m_2+1\rangle$. Warto zauważyć, że oba te stany odpowiadają tej samej wartości własnej $\hat{J}_3$: $m_1 + m_2$, czego należało oczekiwać, gdyż $\hat{J}_3$ komutuje z $\hat{J}^2$.

Z równania (17.8) wynika, że stany diagonalizujące $\hat{J}^2$ będą w ogólności kombinacjami liniowymi stanów iloczynowych $|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle$:

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=m}} |j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle\; C^{jm}_{j_1m_1, j_2m_2}, \qquad (17.9)$$

gdzie suma przebiega po m_1 i m_2 z warunkiem, że $m_1 + m_2 = m$. Współczynniki liczbowe $C^{jm}_{j_1m_1, j_2m_2}$ mnożące stany $|j_1, m_1\rangle\,|j_2, m_2\rangle$ w tych kombinacjach liniowych noszą nazwę *współczynników Clebscha-Gordana.* Dla współczynników tych przyjęto stosować nieco inną notację

$$C^{jm}_{j_1m_1,j_2m_2} = \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right). \tag{17.10}$$

Wówczas wzór (17.9) przyjmuje postać:

$$|j,m\rangle = \sum_{\substack{m_1,m_2 \\ m_1+m_2=m}} |j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right), \tag{17.11}$$

Zauważmy, że stany (17.9) czy (17.11) są także stanami własnymi $J^{(1,2)^2}$ i czasami są oznaczane jako

$$|j_1,j_2;j,m\rangle = \sum_{\substack{m_1,m_2 \\ m_1+m_2=m}} |j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right). \tag{17.12}$$

W dalszej części dla uproszczenia będziemy używać (17.9), (17.11).

17.2 Konstrukcja

Aby wyliczyć $C^{jm}_{j_1m_1,j_2m_2}$ zastosujemy systematyczną procedurę jawnej konstrukcji stanów własnych operatora $\hat{J}^2$. Zauważmy najpierw, że istnieją dwa stany iloczynowe, które są stanami własnymi $\hat{J}^2$, mianowicie stany o najwyższych i najniższych możliwych rzutach krętu $m_{1,2} = \pm j_{1,2}$. Rzeczywiście dla tych dwu wartości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{J}^2\,|j_1,\pm j_1\rangle\,|j_2,\pm j_2\rangle &= (j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2j_1j_2)\,|j_1,\pm j_1\rangle\,|j_2,\pm j_2\rangle \\ &= (j_1+j_2)(j_1+j_2+1)\,|j_1,\pm j_1\rangle\,|j_2,\pm j_2\rangle\,. \end{aligned} \tag{17.13}$$

Widzimy zatem, że te dwa stany są stanami własnymi operatora $\hat{J}^2$ do wartości własnej $j = j_1 + j_2$ oraz operatora $\hat{J}_3$ do wartości własnej $m = \pm(j_1 + j_2)$. Pozostaje zatem jedynie ustalić współczynnik proporcjonalności pomiędzy stanem $|j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle$ a stanem $|j_1, j_1\rangle\,|j_2, j_2\rangle$. Ze względu na warunek unormowania współczynnik ten może przyjmować jedynie postać fazy $e^{i\varphi}$. Tradycyjnie fazę tę przyjmuje się jako zero, czyli

$$|j = j_1 + j_2, m = j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_1\rangle\,|j_2, j_2\rangle\,. \tag{17.14}$$

Warunek ten tłumaczy się na wartość pierwszego współczynnika Clebscha-Gordana

$$\left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j = j_1 + j_2 \\ j_1 & j_2 & m = j_1 + j_2 \end{array} \right) = 1. \tag{17.15}$$

Współczynnik proporcjonalności dla stanu o $m = -j_1 - j_2$ wyjdzie nam w sposób naturalny z konstrukcji stanów własnych operatora $\hat{J}^2$. Wzór (17.14) jest pierwszą z tzw. konwencji Condona-Shortleya.

Mając stan $|j,j\rangle$ możemy skonstruować wszystkie stany własne operatora $\hat{J}^2$ do wartości własnej $j = j_1 + j_2$ poprzez wielokrotne działanie operatorem $\hat{J}_-$. Działając jednokrotnie otrzymujemy

$$\hat{J}_- |j,j\rangle = \sqrt{2j}\, |j, j-1\rangle \,,$$
$$\left(\hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}\right) |j_1,j_1\rangle\, |j_2,j_2\rangle = \sqrt{2j_1}\, |j_1, j_1-1\rangle\, |j_2,j_2\rangle + \sqrt{2j_2}\, |j_1,j_1\rangle\, |j_2,j_2-1\rangle \,, \tag{17.16}$$

gdzie $j = j_1 + j_2$. Ponieważ oba stany we wzorze (17.16) są sobie równe, otrzymujemy, że

$$|j,j-1\rangle = \sqrt{\frac{j_1}{j}}\, |j_1,j_1-1\rangle\, |j_2,j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j}}\, |j_1,j_1\rangle\, |j_2,j_2-1\rangle \,. \tag{17.17}$$

?atwo się upewnić, że tak zdefiniowany stan $|j,j-1\rangle$ jest poprawnie unormowany. Wzór (17.17) tłumaczy się na wartości owiednich współczyników Clebscha-Gordana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1+j_2 \\ j_1-1 & j_2 & j_1+j_2-1 \end{array} \right) = \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}},$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1+j_2 \\ j_1 & j_2-1 & j_1+j_2-1 \end{array} \right) = \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}. \tag{17.18}$$

Mając do dyspozycji dwa stany o całkowitym $m = j_1 + j_2 - 1$:

$$|j_1,j_1-1\rangle\, |j_2,j_2\rangle \,, \quad |j_1,j_1\rangle\, |j_2,j_2-1\rangle \tag{17.19}$$

możemy skonstruować drugą kombinację liniową, która będzie ortogonalna do (17.17). Kombinacja ta będzie stanem własnym operatora $\hat{J}_3$ do tej samej wartości własnej $m = j-1$. Ponieważ stany $|j,m\rangle$ nie są zdegenerowane, musi ona odpowiadać stanowi o innym j. Jedynym możliwym stanem jest tu stan $|j-1,j-1\rangle$. A zatem

$$|j-1,j-1\rangle = \alpha\, |j_1,j_1-1\rangle\, |j_2,j_2\rangle + \beta\, |j_1,j_1\rangle\, |j_2,j_2-1\rangle \,, \tag{17.20}$$

gdzie *rzeczywiste* (to kolejna konwencja) współczynniki α i β wyliczymy z warunku ortogonalności

$$\langle j-1,j-1\, | j,j-1\rangle = \alpha\sqrt{\frac{j_1}{j}} + \beta\sqrt{\frac{j_2}{j}} = 0 \tag{17.21}$$

lub z warunku

$$J_+ |j,j-1\rangle = 0 \tag{17.22}$$

i unormowania

$$\langle j-1,j-1\, | j-1,j-1\rangle = \alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{17.23}$$

Jak łatwo się przekonać rozwiązanie równa? (17.21) i (17.23) nie jest jednoznaczne

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{j_2}{j}}, \quad \beta = \mp\sqrt{\frac{j_1}{j}}. \tag{17.24}$$

Musimy zatem przyjąć kolejną konwencję, która jednoznacznie określi wybór znaku w równaniu (17.24). Aby tę konwencję wygodnie wypowiedzieć, zauważmy że

$$\alpha = \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1+j_2-1 \\ j_1-1 & j_2 & j_1+j_2-1 \end{array} \right), \ \beta = \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1+j_2-1 \\ j_1 & j_2-1 & j_1+j_2-1 \end{array} \right). \tag{17.25}$$

Przyjmiemy, że współczynnik $\beta > 0$, co ogólnie możemy zapisać jako

$$\left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1+j_2-n \\ j_1 & j_2-n & j_1+j_2-n \end{array} \right) > 0, \tag{17.26}$$

gdzie $0 \leq n \leq 2j_2$. Konwencja ta pozwala nam wyznaczyć już jednoznacznie wszystkie współczynniki Clebscha-Gordana. Stąd mamy

$$|j-1, j-1\rangle = -\sqrt{\frac{j_2}{j}}\, |j_1, j_1-1\rangle \, |j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_1}{j}}\, |j_1, j_1\rangle \, |j_2, j_2-1\rangle \,, \tag{17.27}$$

czyli

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1+j_2 \\ j_1-1 & j_2 & j_1+j_2-1 \end{array} \right) &= -\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}, \\ \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j_1+j_2 \\ j_1 & j_2-1 & j_1+j_2-1 \end{array} \right) &= \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}. \end{aligned} \tag{17.28}$$

Dalsza procedura jest już oczywista: działamy na stany (17.17) i (17.27) operatorem $\hat{J}_-$ i dostajemy dwie kombinacje liniowe stanów

$$|j_1, j_1-2\rangle \, |j_2, j_2\rangle \,, \quad |j_1, j_1-1\rangle \, |j_2, j_2-1\rangle \,, \quad |j_1, j_1\rangle \, |j_2, j_2-2\rangle \tag{17.29}$$

odpowiadające stanom

$$|j, j-2\rangle \,, \quad |j-1, j-2\rangle \,,$$

gdzie $j = j_1+j_2$. Korzystając z warunku ortogonalności, unormowania i konwencji (17.26) konstruujemy trzecią kombincaję liniową odpowiadającą stanowi

$$|j-2, j-2\rangle \,.$$

Zauważmy, że w zerowym kroku dysponowaliśmy jednym stanem iloczynowym $|j_1, j_1\rangle$ $|j_2, j_2\rangle$, w pierwszym dwoma stanami (17.19), a w drugim trzema stanami (17.29). W $n-$tym kroku powinniśmy mieć do dyspozycji $n+1$ stanów:

$$|j_1, j_1\rangle \, |j_2, j_2\rangle$$

$$|j_1, j_1\rangle \, |j_2, j_2-1\rangle \,, \quad |j_1, j_1-1\rangle \, |j_2, j_2\rangle$$

$$|j_1, j_1\rangle \, |j_2, j_2-2\rangle \,, \quad |j_1, j_1-1\rangle \, |j_2, j_2-1\rangle \,, \quad |j_1, j_1-2\rangle \, |j_2, j_2\rangle$$

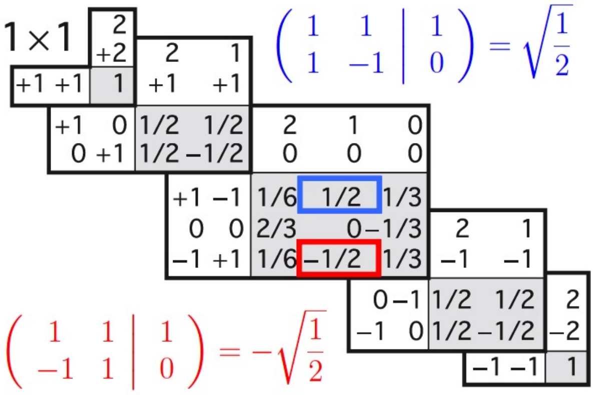
$$\dots \tag{17.30}$$
$$|j_1, j_1\rangle \, |j_2, j_2 - n\rangle \, , \; |j_1, j_1 - 1\rangle \, |j_2, j_2 - n + 1\rangle \, , \; \dots \; |j_1, j_1 - n\rangle \, |j_2, j_2\rangle$$

i tak dalej. Jeżeli jednak $n = 2j_1$ lub $n = 2j_2$ to wówczas w następnym ($n + 1$–wszym) kroku nie pojawia się jeden (lub dwa jeśli $j_1 = j_2$) z dwu skrajnych stanów we wzorze (17.30), co oznacza, że liczba stanów jest taka sama (lub o jeden mniejsza) jak w kroku poprzednim. A to z kolei oznacza, że nie musimy konstruować nowej kombinacji liniowej, która odpowiadałaby stanowi $|j - n - 1, j - n - 1\rangle$. Od tego momentu przestaje pojawiać się konieczność konstruowania stanów o nowym j. Czyli, że minimalne $j_{\min} = j_1 - j_2$ gdy $j_1 > j_2$, lub $j_{\min} = j_2 - j_1$, gdy $j_2 > j_1$. Od tej pory liczba stanów otrzymywana w kolejnych krokach będzie się zmniejszać, aż osiągniemy ostatni, pojedynczy stan iloczynowy $|j_1, -j_1\rangle \, |j_2, -j_2\rangle$.

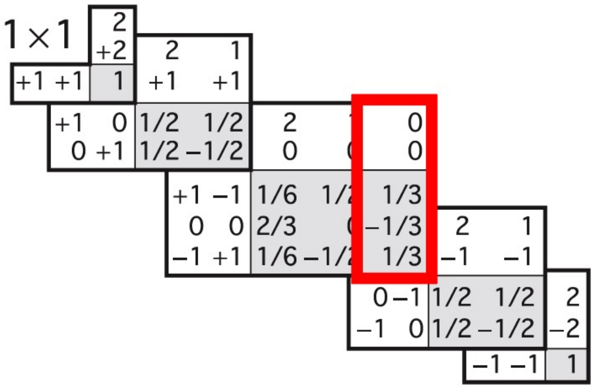
Podsumujmy: w wyniku opisanej konstrukcji otrzymamy kombinacje liniowe stanów iloczynowych odpowiadające stanom własnym całkowitego momentu pędu o j zawartym między
$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \tag{17.31}$$
Liczba wszystkich stanów iloczynowych wynosi
$$(2j_1 + 1) \, (2j_2 + 1) \, , \tag{17.32}$$
natomiast liczba stanów własnych operatora całkowitego krętu $\hat{J}^2$ i $\hat{J}_3$ wynosi
$$N = \sum_{j=|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} (2j + 1). \tag{17.33}$$
Załóżmy, że $j_1 > j_2$ i obliczmy N ze wzoru na sumę postępu arytmetycznego:
$$N = 2 \sum_{j=j_1 - j_2}^{j_1 + j_2} j + \sum_{j=j_1 - j_2}^{j_1 + j_2} 1 = [(j_1 + j_2) + (j_1 - j_2)] \, [2j_2 + 1] + (2j_2 + 1) = (2j_1 + 1) \, (2j_2 + 1) \, . \tag{17.34}$$
Liczba stanów iloczynowych i liczba stanów własnych operatora całkowitego krętu $\hat{J}^2$ i $\hat{J}_3$ są sobie równe. W dodatku oba zbiory stanów są ortonormalne, stąd transformacja (17.11) dla j z przedziału (17.31) jest faktycznie *ortonormalną transformacją* bazy iloczynowej do bazy stanów własnych operatora całkowitego krętu $\hat{J}^2$ i $\hat{J}_3$.

17.3 Jawna postać współczynników Clebscha-Gordana

Współczynniki Clebscha-Gordana są stabelaryzowane i w tej formie można je znaleźć w literaturze. Na przykład dla $j_1 = j_2 = 1$ tabela taka przyjmuje postać pokazaną na Rys. 1, gdzie wartości stojące w tabeli należy wziąć z pierwiastkiem, a ewentualny znak $-$ postawić przed pierwiastkiem.



Rysunek 1: Współczynniki Clenscha-Gordana.



Rysunek 2: Współczynniki Clenscha-Gordana.

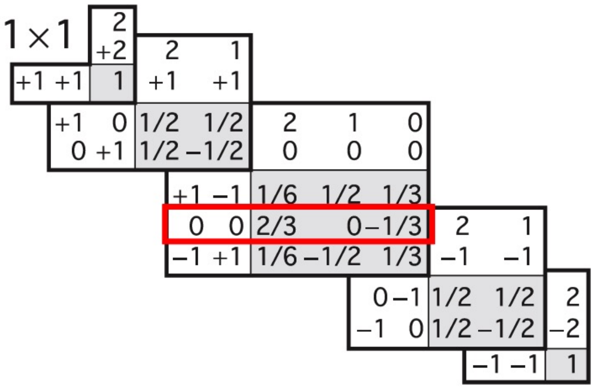
Z powyższej tabeli, Rys. 2, można odczytać rozkład danego stanu o całkowitym momencie pędu j na stany iloczynowe (17.35). Na przykład:

$$|0,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,1\rangle\,|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\,|1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,-1\rangle\,|1,1\rangle\,.$$

Analogicznie z tabeli tej można odczytać relację odwrotną (17.39) reprezentującą rozkład stanu iloczynowego na stany o całkowitym momencie pędu. Na przykład, Rys. 3:

$$|1,0\rangle\,|1,0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|2,0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|0,0\rangle\,.$$

Na koniec zauważmy, że wszystkie rzędy i kolumny w tabeli współczyników Clebscha-Gordana są unormowane w kwadracie oraz wzajemnie ortogonalne, co odpowiada relacjom (17.38) i (17.40).



Rysunek 3: Współczynniki Clenscha-Gordana.

17.4 Własności ortogonalności

Z opisanej wyżej konstrukcji wynika, że współczynniki Clebscha-Gordana są rzeczywiste i sprzężenie hermitowskie stanu

$$|j,m\rangle = \sum_{m_1,m_2} |j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array}\right) \tag{17.35}$$

przyjmuje postać

$$\langle j',m'| = \sum_{m_1',m_2'} \langle j_1',m_1'|\,\langle j_2',m_2'| \left(\begin{array}{cc|c} j_1' & j_2' & j' \\ m_1' & m_2' & m' \end{array}\right), \tag{17.36}$$

gdzie dla późniejszej wygody zamieniliśmy j–ty i m–y na wielkości primowane. Korzystając z warunku ortogonalności stanów

$$\langle j',m'|\,j,m\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{17.37}$$

otrzymujemy

$$\sum_{m_1,m_2} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{array}\right) = \delta_{jj'}\delta_{mm'}. \tag{17.38}$$

Związek ten pozwala nam na zapisanie relacji odwrotnej do (17.11)

$$|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle = \sum_{j,m} |j,m\rangle \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array}\right), \tag{17.39}$$

przy czym sumowanie po j przebiega w granicach (17.31), a sumowanie po m ogranicza się do $m = m_1 + m_2$. O słuszności tej relacji można się przekonać podstawiając (17.39) do (17.35).

Z warunku unormowania stanu (17.39) otrzymujemy drugą relację ortogonalności:

$$\sum_{j,m} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & m \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right) = \delta_{m_1' m_1} \delta_{m_2' m_2}. \tag{17.40}$$

17.5 Związki rekurencyjne

Działając operatorem $\hat{J}_+$ na równanie (17.35) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,|j,m+1\rangle \\
&= \sum_{m_1,m_2} \Big[\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)}\,|j_1,m_1+1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \\
&+ \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2+1)}\,|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2+1\rangle \Big] \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right) \\
&= \sum_{m_1,m_2} \Big[\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}\,|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1-1 & m_2 & m \end{array} \right) \\
&+ \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}\,|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2-1 & m \end{array} \right) \Big]
\end{aligned} \tag{17.41}$$

Zastosujmy teraz wzór (17.35) ale dla stanu $|j,m+1\rangle$ i porównajmy współczynniki przy stanach $|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{j(j+1)-m(m+1)} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m+1 \end{array} \right) \\
&= \quad \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1-1 & m_2 & m \end{array} \right) \\
&+ \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2-1 & m \end{array} \right).
\end{aligned} \tag{17.42}$$

Postępując w analogiczny sposób dla operatota $\hat{J}_-$ otrzymamy drugi związek rekurencyjny

$$\begin{aligned}
&\sqrt{j(j+1)-m(m-1)} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m-1 \end{array} \right) \\
&= \quad \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1+1 & m_2 & m \end{array} \right) \\
&+ \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2+1)} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2+1 & m \end{array} \right).
\end{aligned} \tag{17.43}$$