14 Ruch w polu magnetycznym - poziomy Landaua

14.1 Hamiltonian klasyczny

Dotychczas omówiliśmy dość szczegółowo oddziaływanie cząstki naładowanej z zewnętrznym polem elektrycznym (atom wodoru). Aby opisać także ruch w polu magnetycznym, musimy skwantować odpowiedni hamiltonian klasyczny. Przypomijmy, że hamiltonian ten dostajemy z lagrangianu

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - qV + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}. \tag{14.1}$$

Równania Lagrange'a-Eulera

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$$

przyjmują w tym wypadku postać

$$-q\boldsymbol{\nabla}\cdot V + \frac{q}{c}\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right) - \frac{d}{dt}\boldsymbol{A}\right] = m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}. \tag{14.2}$$

Człony zawierające $\boldsymbol{A}$ warto rozpisać na współrzednych, pamiętając że d/dt oznacza *pełną* pochodną:

$$\begin{aligned}
\nabla_i\left(v_k A_k\right) - \frac{d}{dt}A_i &= \sum_k v_k\left(\nabla_i A_k\right) - \frac{\partial}{\partial t}A_i - \sum_k v_k\left(\nabla_k A_i\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}A_i + \sum_{k\neq i} v_k\left[\left(\nabla_i A_k\right) - \left(\nabla_k A_i\right)\right],
\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że człon z $k = i$ się kasuje. Ostatni człon daje się zapisać jako (używając konwencji sumowania)

$$\begin{aligned}
\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}\right]_i &= \varepsilon_{ijm}\varepsilon_{mkl}v_j\left(\nabla_k A_l\right) \\
&= \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right)v_j\left(\nabla_k A_l\right) \\
&= v_j\left(\nabla_i A_j\right) - v_k\left(\nabla_k A_i\right).
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

mamy ostatecznie

$$\frac{q}{c}\left[\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}\right) - \frac{d}{dt}\boldsymbol{A}\right] = -\frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} + \frac{q}{c}\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right).$$

Ponieważ pole elektryczne

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot V - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$$

równanie (14.2) przyjmuje postać

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = q\,\boldsymbol{E} + \frac{q}{c}\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right).$$

Czyli rzeczywiście Lagrangian (14.1) prowadzi do siły Lorentza.

Aby otrzymać Hamiltonian, musimy obliczyć pęd uogólniony

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\,\boldsymbol{v} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A} \;\to\; \boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)$$

i wykonać transformację Legendre'a

$$\begin{aligned} H &= \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - L \\ &= \frac{1}{m}\boldsymbol{p}\cdot\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right) - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + qV - \frac{1}{m}\frac{q}{c}\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right) \\ &= \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + qV. \end{aligned}$$

14.2 Wybór cechowania I

Zatem Hamiltonian dla cząstki o ładunku q poruszającej się w polu magnetycznym i elektrycznym przyjmuje postać:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right)^2 + qV(\boldsymbol{r},t), \tag{14.3}$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki, zaś c prędkością światła.

O ile część elektryczna nie przedstawia problemów, to część zawierająca potencjał wektorowy$\boldsymbol{A}$ nie daje się prosto skwantować, gdyż potencjał $\boldsymbol{A}$ jest funkcją $\boldsymbol{r}$, a $\boldsymbol{r}$ nie komutuje z operatorem pędu.

Jako przykład rozpatrzmy ruch elektronu w stałym polu magnetycznym $\boldsymbol{B} = (0,0,B)$. Wygodnie przyjąć potencjał wektorowy w postaci:

$$\boldsymbol{A} = B\begin{bmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{14.4}$$

Pole magnetyczne jest równe

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k = \varepsilon_{i21}\nabla_2 A_1 = B\delta_{i3}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m_e}\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{q}{c}\hat{\boldsymbol{A}}\right)^2 = \frac{1}{2m_e}\left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB}{c}y\right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right] \\ &= \frac{1}{2m_e}\hat{p}_x^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_z^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_y^2 + \frac{m_e}{2}\left(\frac{qB}{m_e c}\right)^2 y^2 + \frac{qB}{m_e c}y\hat{p}_x. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Tu separację zmiennych przeprowadzamy zakładając

$$\psi(x,y,z) = f(y) e^{-ip_x x/\hbar} e^{-ip_z z/\hbar}. \tag{14.6}$$

Podstawiając funkcję (14.6) do równania Schrödingera możemy zastąpić operatory $\hat{p}_z$ i $\hat{p}_x$ przez wartości własne. Oznaczając

$$\tilde{\omega} = \frac{qB}{m_e c} = 2\omega \tag{14.7}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2m_e} p_z^2 + \frac{1}{2m_e} \hat{p}_y^2 + \frac{m_e}{2} \tilde{\omega}^2 y^2 + \tilde{\omega} y p_x + \frac{1}{2m_e} p_x^2 \\
&= \frac{1}{2m_e} p_z^2 + \frac{1}{2m_e} \hat{p}_y^2 + \frac{m_e}{2} \tilde{\omega}^2 \left(y^2 + 2\frac{p_x}{m_e \tilde{\omega}} y + \frac{1}{m_e^2 \tilde{\omega}^2} p_x^2 \right).
\end{aligned} \tag{14.8}$$

Zmieniając zmienne

$$\eta = y + \frac{p_x}{m_e \tilde{\omega}} \tag{14.9}$$

otrzymujemy

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} p_z^2 + \frac{1}{2m_e} \hat{p}_\eta^2 + \frac{m_e}{2} \tilde{\omega}^2 \eta^2. \tag{14.10}$$

Jest to hamiltonian oscylatora o częstości $\tilde{\omega}$ (plus ruch swobodny w kierunku z):

$$\begin{aligned}
E_{N,p_z} &= \hbar\tilde{\omega} \left(N + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m_e} \\
&= \hbar\omega \left(2N + 1 \right) + \frac{p_z^2}{2m_e}.
\end{aligned} \tag{14.11}$$

Zwróćmy uwagę, że poziomy te są nieskończenie razy zdegenerowane ze względu na p_x.

14.3 Wybór cechowania II

Inna metoda znalezienia energii poziomów Landaua opiera się na użyciu innego cechowania:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{14.12}$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2m_e} \left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB}{2c} y \right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{qB}{2c} x \right)^2 + \hat{p}_z^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \hbar\tilde{\omega} \left[\frac{\left(\hat{p}_x + \frac{1}{2} m_e \tilde{\omega} y \right)^2}{m_e \hbar\tilde{\omega}} + \frac{\left(\hat{p}_x - \frac{1}{2} m_e \tilde{\omega} x \right)^2}{m_e \hbar\tilde{\omega}} \right] + \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}.
\end{aligned} \tag{14.13}$$

Definiując nowe operatory

$$\hat{\pi}_x = \frac{\hat{p}_x + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}y}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}},\ \hat{\pi}_y = \frac{\hat{p}_y - \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}x}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}}, \tag{14.14}$$

mamy

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\tilde{\omega}\left[\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2\right] + \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}. \tag{14.15}$$

Zbadajmy komutator

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = \frac{1}{m_e\hbar\tilde{\omega}}\left\{-\frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}\left[\hat{p}_x, x\right] + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}\left[y, \hat{p}_y\right]\right\} = i. \tag{14.16}$$

Widzimy zatem, że relacja komutacji $[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y]$ przypomina (z dokładnością do $\hbar$) relację komutacji między położeniem a pędem. Skonstruujmy nowe operatory

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y\right),\ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y\right), \tag{14.17}$$

których relacja komutacji jest w rzeczywistości relacją komutacji operatorów kreacji i anihilacji:

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \frac{i}{2}\left\{-\left[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\right] + \left[\hat{\pi}_y, \hat{\pi}_x\right]\right\} = 1. \tag{14.18}$$

Z kolei

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}\left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2 + i\left[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\right]\right) = \left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2 - 1\right), \tag{14.19}$$

czyli

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2\right) = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}. \tag{14.20}$$

Zatem

$$\hat{H} = \hbar\tilde{\omega}\left[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right] + \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}. \tag{14.21}$$

Dostajemy stąd, że energia poziomów Landaua

$$E = \hbar\frac{\tilde{\omega}}{2}\left(2n + 1\right) + \frac{p_z^2}{2m_e} \tag{14.22}$$

w zgodzie z (14.11). Zgodnie z naszymi poprzednimi rozważaniami, poziomy Landaua są nieskończenie zdegenerowane. Aby się przekonać, że w cechowaniu (14.12) mamy także do czynienia z nieskończoną degeneracją, wystarczy zbadać degeneracje stanu podstawowego, który spełnia równanie

$$\hat{a}\,\psi_0(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{14.23}$$