

13 Naturalne jednostki w fizyce atomowej

W systemie CGS wszystkie wielkości fizyczne wyrażane są jako potęgi trzech fundamentalnych jednostek:

1. długości (l) cm,
2. masy (m) g,
3. czasu (t) s.

Wymiary innych wielkości, z którymi mamy do czynienia w mechanice wyprowadza się z równań. Przykładowo z równań

$$p = mv, \quad E = \frac{1}{2}mv^2, \quad F = \frac{dp}{dt}, \quad \frac{dF_x}{dA} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

wynika

$$\begin{aligned} [\text{pęd}] &= m \cdot l \cdot t^{-1}, \\ [\text{energia}] &= m \cdot l^2 \cdot t^{-2}, \\ [\text{siła}] &= m \cdot l \cdot t^{-2}, \\ [\text{lepkość}] &= m \cdot l \cdot t^{-2} \times l^{-2} \times (l \cdot t^{-1} \cdot l^{-1})^{-1} = m \cdot l^{-1} \cdot t^{-1}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Inne jednostki: funt, cal, ar są pochodnymi tych podstawowych.

W elektrodynamice pojawia się *ładunek*. Nowa jakość wymaga nowej jednostki, np. *Coulomb* czy *Faraday*. Dziś wiemy, że ładunek odpowiada pewnej liczbie elektronów, np:

$$1 \text{ C} = 6,24150636 \times 10^{18} \text{ elektronów}. \quad (13.2)$$

Niezależna jednostka nie jest potrzebna, można użyć jednostek podstawowych, korzystając z prawa Coulomba (nie da się tego jednak zrobić dla grawitacji):

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$$

skąd dostajemy

$$[\text{ładunek}] = [\text{siła}]^{1/2} \cdot l = m^{1/2} \cdot l^{3/2} \cdot t^{-1}. \quad (13.3)$$

Zatem podstawowa jednostka ładunku w systemie CGS to

$$[\text{ładunek}] = \frac{\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2}}{\text{s}}.$$

Jest tak, bo napisaliśmy prawo Coulomba bez stałej proporcjonalności. Gdy $e_1 = e_2 = 1$ i $r = 1$ cm, wtedy siła $F = 1$ dyna. Taki ładunek nazywamy skrótowo *esu* lub *stat Coulomb*. Wynosi on około $2,0819424 \times 10^9$ elektronów.

W układzie MKS (SI) jest inaczej. Nowe jednostki *ad hoc* wprowadza się dowolnie dodając stałe proporcjonalności do wzorów. W MKS 1 Coulomb jest w gruncie rzeczy równoważny pewnej liczbie elektronów (ilu). Definicja: jest to ładunek przenoszony przez prąd o natężeniu jednego ampera w czasie 1 sekundy. Prawo Coulomba

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (13.4)$$

Warto pamiętać, że nawet tak zapisane prawo Coulomba nie wyznacza jednoznacznie układu jednostek. Wiąże się to z różnymi konwencjami na wartość przenikalności elektrycznej **oraz** magnetycznej próżni.

Argument, który pozwala w CGS zdefiniować ładunek, można rozciągnąć na wszystkie wielkości elektrodynamiczne i dokonuje się tego poprzez wzór na siłę Lorentza:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (13.5)$$

Wzór ten ustala jednostki pola magnetycznego, pamiętajmy że e jest już ustalone z części elektrostatycznej. Na potrzeby fizyki atomowej i fizyki cząstek wygodniej jest zdefiniować pole magnetyczne poprzez wzór

$$\vec{F} = q\vec{E} + q \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (13.6)$$

jest to wersja jednostek CGS-Gaussa. Stąd pole magnetyczne (w tym układzie jest to tesla)

$$[\text{pole magnetyczne}] = \frac{[\text{siła}]}{[\text{ładunek}]} = \frac{[\text{siła}]}{[\text{siła}]^{1/2} \cdot l} = m^{1/2} \cdot l^{-1/2} \cdot t^{-1}. \quad (13.7)$$

Kiedy jednak opuszczamy świat ludzkich rozmiarów, układ CGS przestaje być naturalny. Świadczą o tym duże potęgi 1/10 w stałych \hbar czy c wyrażonych w CGS.

$$\begin{aligned} \hbar &= \frac{h}{2\pi} = 1,05457266(63) \times 10^{-27} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}, \\ c &= 2,99792458 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}, \\ E &= \text{eV} = 1,60217733(49) \times 10^{-12} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2}. \end{aligned}$$

System jednostek, w którym każda wielkość może być wyrażona przez \hbar , c jest powszechnie używany w fizyce atomowej, jądrowej, astrofizyce, fizyce wysokich energii. Jest to Naturalny Układ Jednostek.

m , l oraz t są niezależne, można jednak użyć innych niezależnych jednostek:

$$\begin{aligned} [\text{działanie}] &= m \cdot l^2 \cdot t^{-1}, \\ [\text{prędkość}] &= l \cdot t^{-1}, \\ [\text{energia}] &= m \cdot l^2 \cdot t^{-2}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Każda wielkość D w CGS może być przeliczona na te jednostki

$$[D] = m^a l^b t^c = E^\alpha \hbar^\beta c^\gamma = m^{\alpha+\beta} \cdot l^{2(\alpha+\beta)+\gamma} \cdot t^{-2\alpha-\beta-\gamma}, \quad (13.9)$$

gdzie

$$\begin{aligned}\alpha &= a - b - c, \\ \beta &= b + c, \\ \gamma &= b - 2a.\end{aligned}\tag{13.10}$$

W tych jednostkach mamy

$$\begin{aligned}[\text{masa}] &= \text{eV} \cdot c^{-2}, \\ [\text{czas}] &= \text{eV}^{-1} \cdot \hbar, \\ [\text{długość}] &= \text{eV}^{-1} \cdot \hbar \cdot c, \\ [\text{pęd}] &= \text{eV} \cdot c^{-1}, \\ [\text{siła}] &= \text{eV}^2 \cdot \hbar^{-1} \cdot c^{-1}, \\ [\text{ciśnienie}] &= \text{eV}^4 \cdot \hbar^{-3} \cdot c^{-3}, \\ [\text{ładunek}^2] &= \hbar \cdot c, \\ [\text{pole magnetyczne}] &= \text{eV}^2 \cdot \hbar^{-3/2} \cdot c^{-3/2}.\end{aligned}$$

Powody, dla których ten układ jednostek jest dobry:

- Prostota. Można opuścić \hbar i c . To można było zrobić w CGS, eliminując np. cm i sekundę wyrażając wszystkie wielkości w gramach. Nie robi się tego, bo nie ma po temu żadnej fundamentalnej przyczyny i dlatego, bo lubimy różne jednostki dla różnych wielkości. W przypadku jednostek naturalnych \hbar i c są wyróżnione i stanowią naturalne jednostki działania i prędkości dla zjawisk atomowych. Druga niedogodność jest zrównoważona przez wygodę. Czynniki konwersji:

$$\begin{aligned}\hbar c &= 197.327053(59) \text{ MeV fm} = 1.973 \dots \times 10^{-11} \text{ MeV cm}, \\ \hbar &= 6.5821220(20) \times 10^{-22} \text{ MeV s}, \\ c &= 2.997 \times 10^{10} \text{ cm/s}\end{aligned}\tag{13.11}$$

(1 MeV = 10^6 eV, 1 fm = 10^{-13} cm). W tych jednostkach ładunek elektronu (kwadrat) wynosi:

$$e^2 = 7.29 \times 10^{-3} \hbar c = \frac{1}{137} \hbar c$$

- Naturalność. Stała Plancka i prędkość światła wyznaczają skalę zjawisk kwantowych. Przykłady

1. Promień Bohra.

Będziemy potrzebowali masę elektronu

$$m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}.$$

Z definicji promienia Bohra

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{(\hbar c)^2}{m_e c^2 e^2} = \frac{1.973 \times 10^{-11} [\text{MeV cm}]}{0.511 [\text{MeV}]} \frac{1}{137} = 0.529 \times 10^{-8} [\text{cm}].$$

2. Jaka jest charakterystyczna odległość odpowiadająca elektronowi? Pamiętajmy, że w jednostkach naturalnych [długość] = $eV^{-1} \cdot \hbar \cdot c$

$$l_e = \frac{\hbar c}{m_e c^2} = \frac{197 \text{ MeV fm}}{0.511 \text{ MeV}} = 385 \text{ fm} = 3.85 \times 10^{-11} \text{ cm}.$$

Z drugiej strony

$$l_e = \frac{\hbar}{m_e c}.$$

To jest długość fali Comptona elektronu.

Jaki to czas?

$$t_e = \frac{l_e}{c} = 1,28 \times 10^{-21} \text{ s}. \quad (13.12)$$

To jest czas, jaki jest potrzebny, żeby światło przeleciało długość fali Comptona elektronu.

Jaka to częstość?

$$\nu_e = \frac{1}{t_e} = 7,8 \times 10^{20} \text{ Hz} \quad (13.13)$$

co stanowi częstość każdego z dwóch fotonów (promieni światła) wyemitowanych w wyniku anihilacji elektron-pozyton.

Morał: wszystkie interesujące skale kwantowe i relatywistyczne związane z elektronem są naturalne w Naturalnym Układzie Jednostek.

3. Elektron o energii 10 eV rozprasza się na atomie pod kątem 0,2 radiana. Jaką odległość wgłąb atomu penetruje taki elektron?

Najpierw policzmy jego pęd

$$p = \sqrt{2mE} = (2 \times 511 \text{ keV} \times 10 \text{ eV})^{1/2} = 3,2 \text{ keV}. \quad (13.14)$$

Dla małych przekazów pędu w przybliżeniu $\Delta p = \theta p = 0,64 \text{ keV}$. Użyjemy teraz zasady nieoznaczoności (bez 1/2, bo chodzi o rząd wielkości)

$$\Delta x \simeq \frac{\hbar}{\Delta p} = (0,64 \text{ keV})^{-1} = \frac{197 \text{ MeV fm}}{0,64 \text{ keV}} \simeq 3,1 \times 10^{-13} \text{ cm} \simeq 3,1 \text{ \AA},$$

czyli 4 rzędy wielkości mniej niż promień atomu Bohra.

4. Zgodnie z (13.3) kwadrat ładunku elektronu ma ten sam wymiar co $\hbar c$:

$$[e^2] = \frac{m \cdot l^3}{t^2} = [\hbar \cdot c].$$

Ile wynosi $\alpha_{\text{ELM}} = e^2/\hbar c$, która to kombinacja jest bezwymiarową miarą siły oddziaływań elektromagnetycznych? To już wyliczyliśmy w przybliżeniu, dokładna wartość wynosi $(137,0359895(61))^{-1}$.

5. Wróćmy do skal atomowych. Długość fali Comptona elektronu wynosi $\lambda = \hbar/mc$. Ponieważ mamy do dyspozycji α_{ELM} , które jest bezwymiarowe, możemy budować różne skale wielkości posiadające różne potęgi e . Np.:

$$r_e = \lambda \alpha_{\text{ELM}} = \frac{e^2}{mc^2}, \quad (13.15)$$

gdzie \hbar się uprościło. Jest to więc wielkość klasyczna, często nazywana klasycznym promieniem elektronu. Precyzyjniej, jest to skala klasycznego rozkładu ładunku, którego energia potencjalna jest rzędu masy elektronu. Nie odgrywa ona roli w mechanice kwantowej. Bardziej interesująca jest wielkość

$$a_0 = \frac{\lambda}{\alpha_{\text{ELM}}} = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad (13.16)$$

czyli promień Bohra. Zwróćmy uwagę, że a_0 jest jedyną wielkością o wymiarze długości, która zawiera \hbar , m oraz e , bez c . A zatem jest to jedyna skala długości, która charakteryzuje nierelatywistyczne efekty kwantowe w atomie. Analogicznie jedyna nierelatywistyczna skala energii (bez c) daje się zapisać jako

$$E_0 = \frac{e^2}{a_0} = \frac{me^4}{\hbar^2} \quad (13.17)$$

co rzeczywiście odpowiada energii stanu podstawowego z dokładnością do $E_1 = E_0/2$.

6. Inny przykład analizy wymiarowej: ponieważ α_{ELM} jest bezwymiarowa, e^2/\hbar ma wymiar prędkości. Zatem predkość elektronu w atomie wodoru

$$\frac{v}{c} \simeq \alpha_{\text{ELM}} \simeq \frac{1}{137}.$$