8 Oscylator harmoniczny metodą operatorów kreacji i anihilacji

8.1 Operatory kreacji i anihilacji

Spróbujmy znany nam już hamiltonian oscylatora harmonicznego

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p}^2}{m} + \omega^2 m\,\hat{x}^2\right) \tag{8.1}$$

zapisać przy pomocy operatorów

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p}, \\
\hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{p}.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Po pierwsze tak zdefiniowane operatory $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$ nie są hermitowskie. Po drugie są to obiekty bezwymiarowe, w taki bowiem sposób dobraliśmy stałe mnożące $\hat{x}$ i $\hat{p}$. Po trzecie ich komutator jest równy 1. Policzmy najpierw iloczyny:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{m\omega}{2\hbar}\,\hat{x}^2 - \frac{i}{2\hbar}\,\hat{x}\,\hat{p} + \frac{i}{2\hbar}\hat{p}\,\hat{x} + \frac{1}{2m\omega\hbar}\,\hat{p}^2 \tag{8.3}$$

i

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{m\omega}{2\hbar}\,\hat{x}^2 + \frac{i}{2\hbar}\,\hat{x}\,\hat{p} - \frac{i}{2\hbar}\hat{p}\,\hat{x} + \frac{1}{2m\omega\hbar}\,\hat{p}^2. \tag{8.4}$$

Pamiętając że:

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar, \tag{8.5}$$

mamy

$$\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = -\frac{i}{2\hbar}\,[\hat{x},\hat{p}] + \frac{i}{2\hbar}\,[\hat{p},\hat{x}] = 1. \tag{8.6}$$

Z kolei *antykomutator*, czyli suma

$$\left\{\hat{a},\hat{a}^\dagger\right\} = \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{m\omega\hbar}\,\hat{p}^2 + \frac{m\omega}{\hbar}\,x^2 = \frac{2}{\hbar\omega}\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p}^2}{m} + \omega^2 m\,x^2\right). \tag{8.7}$$

Ostatni człon jest proporcjonalny do hamiltonianu $\hat{H}$. Stąd otrzymujemy, że

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{8.8}$$

Aby wyprowadzić tę ostatnią formę $\hat{H}$ zastosowaliśmy relację komutacji (8.6).

8.2 Stany własne i wartości własne $\hat{H}$

Aby rozwiązać równanie Schrödingera

$$\hat{H}\,|\alpha\rangle = E\,|\alpha\rangle \tag{8.9}$$

musimy znaleźć spektrum operatora $\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Oczywiście stany $|\alpha\rangle$ są też stanami własnymi $\hat{a}^\dagger\hat{a}$:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle\,. \tag{8.10}$$

Ponieważ hamiltonian $\hat{H}$ jest hermitowski, jego wartosci własne, a więc także wartości własne α muszą być rzeczywiste. O stanach $|\alpha\rangle$ założymy, że są unormowane:

$$\langle\alpha\,|\alpha\rangle = 1. \tag{8.11}$$

Zobaczmy, czy stan

$$|\beta\rangle = \hat{a}\,|\alpha\rangle$$

jest też stanem własnym operatora $\hat{a}^\dagger\hat{a}$:

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|\beta\rangle &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\,|\alpha\rangle = \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1\right)\hat{a}\,|\alpha\rangle = \hat{a}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1\right)\,|\alpha\rangle \\ &= \hat{a}\,(\alpha-1)\,|\alpha\rangle = (\alpha-1)\,\hat{a}\,|\alpha\rangle = (\alpha-1)\,|\beta\rangle\,.\end{aligned}$$

Widzimy zatem, że stan $|\beta\rangle$ jest stanem własnym operatora $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ do wartości własnej $\alpha-1$, nie wiemy jednak, czy jest unormowany. Stąd

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \mathcal{N}_-\,|\alpha-1\rangle\,. \tag{8.12}$$

Powtarzając analogiczny rachunek dla stanu

$$\hat{a}^\dagger\,|\alpha\rangle$$

otrzymamy

$$\hat{a}^\dagger\,|\alpha\rangle = \mathcal{N}_+\,|\alpha+1\rangle\,. \tag{8.13}$$

Spróbujmy teraz wyliczyć czynniki normujące $\mathcal{N}_\pm$. Norma stanu $|\beta\rangle$ wynosi:

$$\langle\beta\,|\beta\rangle = \langle\alpha\,|\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha. \tag{8.14}$$

Zwróćmy uwagę, że we wzorze (8.14) oba operatory działają na prawo. Z drugiej strony

$$\langle\beta\,|\beta\rangle = \mathcal{N}_-^2.$$

Stąd $\mathcal{N}_- = \sqrt{\alpha}$. Postępując podobnie

$$\mathcal{N}_+^2 = \langle\alpha+1\,|\alpha+1\rangle = \langle\alpha|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|\alpha\rangle = \langle\alpha|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\,|\alpha\rangle = \alpha+1, \tag{8.15}$$

co daje $\mathcal{N}_+ = \sqrt{\alpha+1}$.

Podsumujmy: operatory $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$ działają na stany własne operatora $\hat{H}$ w ten sposób, że obniżają lub podwyższają wartość własną α o 1. Dodatkowo domnażają taki stan własny przez wyliczony przez nas właśnie czynnik $\mathcal{N}_-$ lub $\mathcal{N}_+$. Zażądamy teraz, aby istniał stan podstawowy układu, czyli stan o minimalnej energii. Nie możemy zatem działając wielokrotnie operatorem $\hat{a}$ obniżać w nieskończoność wartości własne α . Zauważmy, że jeżeli zażądać, aby $\alpha = n$, czyli aby wartości własne operatora $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ były liczbami naturalnymi, to działając n-krotnie operatorem $\hat{a}$ na stan $|n\rangle$ dostaniemy stan $|0\rangle$. Kolejne działanie operatorem $\hat{a}$ da 0 , ponieważ wyzeruje się czynnik $\mathcal{N}_-$. Zatem stan $|0\rangle$ jest stanem podstawowym oscylatora harmonicznego. Wszystkie stany wzbudzone otrzymujemy poprzez wielokrotne działanie na stan $|0\rangle$ operatorem $\hat{a}^\dagger$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \hat{a}\,|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \\ \hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \\ \hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle &= n\,|n\rangle\,. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Łatwo się przekonać, że unormowane stany $|n\rangle$ mają postać:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle\,. \tag{8.17}$$

Z operatorami $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$możemy skojarzyć macierze

$$\begin{aligned} \hat{a}\,|n\rangle &= \sum_m |m\rangle\, a_{mn},\ a_{mn} = \langle m|\,\hat{a}\,|n\rangle\,, \\ \hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \sum_m |m\rangle\, a^\dagger_{mn},\ a^\dagger_{mn} = \langle m|\,\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\,. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Korzystając z (8.16) łatwo wykazać, że te nieskończenie wymiarowe macierze przyjmują następującą postać:

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},\ a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{8.19}$$

Przypomnijmy sobie, że macierze (8.19) działają w przestrzeni wektorów

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_k \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

rozpinających dany stan $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0} c_k\,|k\rangle\,. \tag{8.21}$$

Stąd stanom $|n\rangle$ są w tej reprezentacji odpowiadają wektory $\vec{c}_n$

$$\vec{c}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{pozycja}\, n \\ \\ \end{array} . \tag{8.22}$$

(Uwaga: składowe wektorów $\vec{c}_n$ numerujemy począwszy od $n = 0$ a nie 1). Tę reprezentację stanów własnych oscylatora harmonicznego nazywamy *reprezentacją obsadzeń*, operatory $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$ noszą nazwę operatorów *kreacji* i *anihilacji*, albo jak już mówiliśmy *obniżania* i *podnoszenia*.

8.3 Reguły komutacji macieray nieskończonych

Rozważmy dwa operatory, których komutator jet proporcjonalny do operatora jednostkowego

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = c\mathbf{1}. \tag{8.23}$$

Mogą to być np. operatory pędu i położenia lub operatory kreacji i anihilacji. Łatwo można wykazać, że dla takich operatorów nie istnieje skończnie wymiarowa (n wymiarowa) reprezentacja macierzowa. Rzecziwiście boräc ślad z obu stron równania (8.23) dostajemy sprzeczność:

$$\mathrm{Tr}\,(AB) - \mathrm{Tr}\,(BA) = 0,\ c\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{1} = cn. \tag{8.24}$$

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że ten dowód stosuje się także do macierzy nieskończenie wymiarowych: lewa strona jest w dalszym ciagu równa zero, a prawa dąży do nieskończoności dla $n \to \infty$.

Przyjrzyjmy się bliżej temu problemowi badając relację komutacji dla operatorów kreacji i anihilacji (8.6). Aby obliczyć ślad obu stron (8.6) obliczmy najpierw element diagonalny

$$\begin{aligned} \langle n| \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] |n\rangle &= \langle n| \hat{a}\hat{a}^\dagger |n\rangle - \langle n| \hat{a}^\dagger\hat{a} |n\rangle \\ &= (n+1) - n \\ &= 1 \end{aligned} \tag{8.25}$$

zgodnie z (8.6). Obliczenie śladu polega na wysumowaniu obu stron (8.6) po n, co daje dwa identyczne, rozbieżne szeregi

$$\sum_n 1.$$

Taki sposób wzięcia śladu nie prowadzi do sprzeczności. Możemy jednak sumowanie wykonać w innej kolejności: najpierw wysumować oddzielnie każdy z członów komutatora, a potem odjąć:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle n| \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] |n\rangle = (1+2+3+\ldots) - (0+1+2+\ldots)\,.$$

Ponieważ wyrażenia w nawiasach są w rzeczywistości dwoma identycznymi, nieskończonymi szeregami, wydawałoby się, że ich różnica powinna wynosić zero, co prowadziłoby do sprzeczności. Jednakże odjęcie dwóch nieskończonych szeregów nie jest jednoznaczne. Aby nie popaść w sprzeczność, ślad musimy brać odejmując kolejne wyrazy szeregów: $1-0$, $2-1$, itd. Widzimy zatem, że cykliczność śladu dla macierzy nieskończonych (reprezentujących operatory *nieograniczone*) w takim przypadku nie zachodzi.

Problem ten oczywiście pojawia się dla relacji komutacji $\hat{x}$ oraz $\hat{p}$. Mamy

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{8.26}$$

oraz

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{8.27}$$

Zbadajmy komutator. Okazuje się, że jeżeli obciąć nieskończone macierze $\hat{p}$ i $\hat{x}$ do rozmiaru n, to dostajemy

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & -(n-1) \end{bmatrix}}_{n \text{ kolumn}}. \tag{8.28}$$

Widzimy, że ślad komutatora znika, ale reguła komutacji załamuje się na ostatnim elemencie równym $-(n-1)$. Subtelność tkwi zatem w przejściu granicznym do $n=\infty$, gdzie w pewnym sensie mozemy zapomnieć o kłopotliwym ostatnim elemencie, którego wartość dąży do $-\infty$.

8.4 Własności przestrzenne stanów $|n\rangle$

Patrząc na wzór (8.22) można odnieść wrażenie, że zgubiliśmy gdzieś informację o własnościach przestrzennych stanu kwantowego, gdyż wektory $|n\rangle$ są wektorami liczbowymi. Zauważmy jednak, że korzystając ze związków (8.16) możemy wyliczyć wszystkie własności przestrzenne stanu kwantowego. W tym celu wyliczmy operator $\hat{x}$:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger+\hat{a}\right),\\ \hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}\right).\end{aligned}\tag{8.29}$$

Ponieważ operatory $\hat{a}$ i $\hat{a}^\dagger$ zmieniają stan obniżając lub podnosząc n:

$$\hat{x}\left|n\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle+\hat{a}\left|n\right\rangle\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle+\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle\right),\tag{8.30}$$

więc

$$\left\langle m\right|\hat{x}\left|n\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}+\sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right).\tag{8.31}$$

Stąd:

$$\left\langle n\right|\hat{x}\left|n\right\rangle = 0.\tag{8.32}$$

Ten sam wynik otrzymalibyśmy w reprezentacji położeniowej wykonując całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|\psi_n(x)|^2 x = 0,\tag{8.33}$$

ponieważ $|\psi_n(x)|^2$ jest symetryczną funkcją x. Spróbujmy policzyć średnie odchylenie kwadratowe x dla stanu podstawowego,

$$\Delta x^2 = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}.$$

które dane jest wzorem:

$$\begin{aligned}\left\langle n\right|\hat{x}^2\left|n\right\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle n\right|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger+\hat{a}\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\left|n\right\rangle\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}(n+n+1)\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1).\end{aligned}\tag{8.34}$$

Dla $n=0$ dostajemy znany nam już wzór. A zatem korzystając z (8.29) możemy wyliczyć wszystkie *momenty* przestrzennego rozkładu cząstki w stanie n. Podobnie możemy wyliczyć charakterystyki pędowe stanu $|n\rangle$. Średni pęd jest w oczywisty sposób zero, natomiast średnie odchylenie kwadratowe jest równe

$$\begin{aligned}\left\langle n\right|\hat{p}^2\left|n\right\rangle &= -\frac{m\omega\hbar}{2}\left\langle n\right|\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger+\hat{a}\hat{a}-\hat{a}^\dagger\hat{a}-\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)\left|n\right\rangle\\ &= \frac{m\omega\hbar}{2}(2n+1).\end{aligned}\tag{8.35}$$

Stąd zasada nieoznaczoności

$$\left\langle n\right|\hat{x}^2\left|n\right\rangle\left\langle n\right|\hat{p}^2\left|n\right\rangle = \frac{\hbar^2}{4}(2n+1)^2.$$

8.5 Średnie położenie

Wróćmy do wzoru (8.32). Mówi on, że w stanie własnym energii średnie położenie jest zero i nie zależy od czasu. Weźmy jednak dowolny stan

$$|\psi, t\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \, . \tag{8.36}$$

Wówczas

$$\langle x \rangle_\psi = \sum_{m,n} c_m^* c_n e^{-i(n-m)\omega t} < m|\hat{x}\,|n\rangle \, , \tag{8.37}$$

gdzie użyliśmy $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$. Mając na względzie (8.31) otrzymujemy

$$\langle m|\,\hat{x}\,|n\rangle \; = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1}\right)$$

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle_\psi &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{n=0} \left(\sqrt{n+1} c_{n+1}^* c_n e^{i\omega t} + \sqrt{n} c_{n-1}^* c_n e^{-i\omega t}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sum_{n=1} \sqrt{n} \left(c_n^* c_{n-1} e^{i\omega t} + c_{n-1}^* c_n e^{-i\omega t}\right) \\
&= \sum_n X_n \cos(\omega t + \phi_j),
\end{aligned} \tag{8.38}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$\sqrt{\frac{\hbar n}{2m\omega}} c_n^* c_{n-1} = X_n e^{i\phi_n}. \tag{8.39}$$

Zatem położenie $\langle x \rangle_\psi$ oscyluje sinusoidalnie (jak w klasycznym oscylatorze). Warunkiem, aby takie oscylacje zachodziły jest, aby przynajmniej dwa sąsiednie stany $|n\rangle$ były zapełnione.

8.6 Reprezentacja położeń

Przy pomocy związku

$$\psi_n(x) = \langle x\,|n\rangle$$

możemy skonstruować funkcję falową w reprezentacji położeń. W tym celu skonstruujmy najpierw funkcję falową stanu podstawowego

$$\psi_0(x) = \langle x\,|0\rangle \, . \tag{8.40}$$

Korzystając z faktu, że operator $\hat{a}$ anihiluje stan podstawowy, napiszmy równanie różniczkowe na ψ_0:

$$< x|\hat{a}|0 > = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} < x| \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) |0\rangle \; = 0. \tag{8.41}$$

Zauważmy teraz, że:

$$
\begin{aligned}
\langle x| \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) |0\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, \langle x| \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) |x'\rangle \, \langle x' \, |0\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, \left\{ x'\delta(x-x') + \frac{i}{m\omega} \left(-\delta(x-x') i\hbar \frac{d}{dx'} \right) \right\} \psi_0(x') \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, \delta(x-x') \left\{ x' + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx'} \right\} \psi_0(x') \\
&= \left\{ x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right\} \psi_0(x) = 0.
\end{aligned} \tag{8.42}
$$

Równanie (8.42) łatwo rozwiązać:

$$
\psi_0(x) = \mathcal{N} \, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{8.43}
$$

Jest to rzeczywiście znana już nam funkcja falowa stanu podstawowego oscylatora harmonicznego, gdzie $\mathcal{N}^2 = \sqrt{m\omega/\pi\hbar}$.

Na koniec wyliczmy funkcję $\psi_n(x)$. W tym celu wygodnie jest wprowadzić nową zmienną

$$
\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x.
$$

Wówczas

$$
\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right), \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right).
$$

Zauważmy, że działanie operatora $\hat{a}^\dagger$ na dowolną funkcję $f(\xi)$ daje się zapisać jako

$$
\sqrt{\frac{1}{2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right) f(\xi) = -\sqrt{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(e^{-\frac{1}{2}\xi^2} f(\xi) \right). \tag{8.44}
$$

Dwukrotne działanie $\left(\hat{a}^\dagger\right)^2$ sprowadza się do

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{2^2}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right)^2 f(\xi) &= \sqrt{\frac{1}{2^2}} (-)^2 e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right) f(\xi) \right] \\
&= \sqrt{\frac{1}{2^2}} (-)^2 e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d}{d\xi} \frac{d}{d\xi} \left(e^{-\frac{1}{2}\xi^2} f(\xi) \right).
\end{aligned} \tag{8.45}
$$

Stąd już dalsza indukcja jest oczywista:

$$
\sqrt{\frac{1}{2^n}} \left(\xi - \frac{d}{d\xi} \right)^n f(\xi) = (-)^n \sqrt{\frac{1}{2^n}} e^{\frac{1}{2}\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} \left(e^{-\frac{1}{2}\xi^2} f(\xi) \right). \tag{8.46}
$$

A zatem na mocy (8.17)

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= \sqrt{\frac{1}{n!2^n}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n \mathcal{N}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \\ &= \mathcal{N}\sqrt{\frac{1}{n!2^n}}(-)^n e^{\frac{1}{2}\xi^2}\,\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right) \\ &= \mathcal{N}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\sqrt{\frac{1}{n!2^n}}(-)^n e^{\xi^2}\,\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right).\end{aligned} \tag{8.47}$$

Zauważmy, że ostatni człon odtwarza znormalizowane z wagą $e^{-\xi^2}$ wielomiany Hermite'a.