4 Postulaty mechaniki kwantowej, stany kwantowe, operatory

Z każdym pomiarem wykonanym nad układem fizycznym stowarzyszone jest spektrum: możliwe wyniki dla danej wielkości, np. energia, pęd, położenie, moment pędu, itp. Możliwe wyniki mogą przyjmować wartości dyskretne lub ciągłe. Np. rzut spinu na oś z może być $\pm 1/2$, współrzedna x zmienia się w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Z każdym możliwym wynikiem pomiaru stowarzyszona jest amplituda prawdopodobieństwa otrzymania takiego wyniku. Zatem w mechanice kwantowej system fizyczny jest scharakteryzowany przez zbiór amplitud prawdopodobieństwa, układ klasyczny natomiast scharakteryzowany jest przez wartości wielkości fizycznych.

W mechanice kwantowej każdej mierzalnej wielkości fizycznej odpowiada pewien operator hermitowski. Problem diagonalizacji takiego operatora, a więc znalezienie wartości własnych i funkcji własnych, to typowy przykład problemów, z jakimi zetkniemy się w dalszej części tego wykładu. Będziemy badać ewolucję czasową stanów kwantowych, odpowiemy także na pytanie, jak pomiar zmienia stan kwantowy układu. Podamy teraz cztery tzw. postualty mechaniki kwantowej, które pozwolą nam na nieco bardziej ogólne, czy abstrakcyjne spojrzenie na mechanikę kwantową.

4.1 Stany kwantowe – przestrzeń Hilberta

Postulujemy, że stan układu, który za Dirakiem oznaczymy wielkością zwaną *ketem*

$$|\psi\rangle \tag{4.1}$$

jest elementem przestrzeni Hilberta. Stan należy rozumieć, jako zbiór wszystkich amlitud a_i, które określają nam prawdopodobieństwo otrzymania wyniku A_i przy pomiarze wielkości A na stanie $|\psi\rangle$. Jeżeli układem fizycznym jest np. cząstka w jakimś potencjale to wielkościami $A_i = E_i$ mogą być dozwolone energie układu, albo położenie czastki. Wówczas amplitudy $a_i^\psi = a^\psi(E_i)$ określają prawdpodobieństwo, że energia cząstki wynosi E_i, albo $a_x^\psi = a^\psi(x)$ są amplitudami prawdopodobieństwa, że cząstka jest w punkcie x. Ten przykład pokazuje, że spektra mogą być dyskretne, lub ciągłe. Możemy też opisać układ amplitudami zwiazanymi z wartościami pędu, momentu pedu, spinu itd. Ket $|\psi\rangle$ zawiera w sobie wszytkie informacje o stanie kwantowym, niezaleznie od tego jaki konkretny zbiór amplitud wybierzemy do jego opisu.

Przestrzeń Hilberta jest zupełną, zespoloną przestrzenią wektorową. Przypomnijmy, że przestrzeń wektorowa $\mathcal{H}$, to taka przestrzeń, której elementy można dodawać (zasada superpozycji):

$$\text{Jeżeli } \left|\psi_{1,2}\right\rangle \in \mathcal{H} \text{ to } |\psi_3\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}, \tag{4.2}$$

mnożyć przez liczbę (w naszym wypadku zespoloną) α:

$$|\psi'\rangle = \alpha\,|\psi\rangle = |\psi\rangle\,\alpha \in \mathcal{H}. \tag{4.3}$$

Z punktu widzenia mehaniki kwantowej kety $|\psi\rangle$ oraz $|\psi'\rangle$ ($\alpha \neq 0$) niosą tę samą informację fizyczną. Innymi słowy tylko *kierunek* w przestrzeni $\mathcal{H}$ ma znaczenie fizyczne.

W teorii przetrzeni wektorowych istnieje pojęcie przestrzeni sprzężonej $\mathcal{H}'$. W zwykłej, trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej przestrzeń $\mathcal{H}'$ jest nierozróżnialna od $\mathcal{H}$. Elementy przestrzeni $\mathcal{H}'$ za Dirakiem nazywamy *bra* i oznaczamy:

$$\langle\psi|\,. \tag{4.4}$$

Wygodnie jest myśleć o ketach jako o kolumnowych wektorach (skończonych lub nieskończonych) o elementach zespolonych

$$|\psi\rangle \rightarrow \left[\begin{array}{c} a_1^{\psi} \\ a_2^{\psi} \\ \vdots \\ a_n^{\psi} \end{array}\right].$$

Wówczas bra można przedstawić jako wiersz o elementach zespolonych

$$\langle\psi| \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} a_1^{\psi\,*} & a_2^{\psi\,*} & \ldots & a_n^{\psi\,*} \end{array}\right].$$

Oznacza to, że dla każdego ketu $|\psi\rangle$ istnieje jednoznacznie wyznaczony bra $\langle\psi|$. Analogicznie jak w przestrzeni $\mathcal{H}$ w przestrzeni sprzężonej mamy określone dodawanie bra i mnożenie przez liczbę zespoloną (zauważmy sprzężęnie współczynników $\alpha_{1,2}$):

$$\alpha_1\,|\psi_1\rangle + \alpha_2\,|\psi_2\rangle \longleftrightarrow \alpha_1^*\,\langle\psi_1| + \alpha_2^*\,\langle\psi_2|\,. \tag{4.5}$$

Z definicji przestrzeń $\mathcal{H}'$ ma ten sam wymiar, co wyjściowa przestrzeń $\mathcal{H}$.

W przestrzeni Hilberta postuluje się istnienie iloczynu wewnętrznego, który jest liczbą zespoloną, taką że zachodzi:

$$\text{iloczyn wewn. } = \langle\chi|\,\psi\rangle = \langle\psi|\,\chi\rangle^* \tag{4.6}$$

w przeciwieństwie do iloczynu skalarnego dwóch wektorów euklidesowych, dla których zachodzi $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$. Z defininicji (4.6) wynika, że $\langle\psi|\,\psi\rangle$ jest liczbą rzeczywistą. Żądamy dodatkowo, aby stany w przestrzeni Hilberta spełniały warunek

$$\langle\psi|\,\psi\rangle \geq 0, \tag{4.7}$$

gdzie równość zachodzi jedynie, jeżeli $|\psi\rangle$ jest ketem zerowym. Warunek (4.7) znany jest jako postulat istnienia dodatnio określonej metryki. Z punktu widzenia fizyka postulat ten jest kluczowy do probabilistycznej interpretacji mechaniki kwantowej. Warunek (4.7) pozwala *znormalizować* każdy niezerowy wektor stanu z przestrzeni Hilberta, poprzez transformację

$$|\psi\rangle \to \left|\tilde{\psi}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{\langle\psi|\,\psi\rangle}}\,|\psi\rangle\,. \tag{4.8}$$

Wówczas $\left\langle\tilde{\psi}\middle|\,\tilde{\psi}\right\rangle = 1$. Wielkość $\sqrt{\langle\psi|\,\psi\rangle}$ nazywamy *normą* stanu $|\psi\rangle$.

Dwa wektory stanu są wzajemnie *ortogonalne* jeżeli zachodzi

$$\langle\chi|\,\psi\rangle = 0, \tag{4.9}$$

co implikuje

$$\langle\psi|\,\chi\rangle = 0. \tag{4.10}$$

Zawarte w definicji przestrzeni Hilberta pojęcie zupełności oznacza, że w przestrzeni tej nie ma „dziur”, czyli że każda skończona lub nieskończona kombinacja liniowa wektorów z przestrzeni $\mathcal{H}$ jest wektorem z tej przestrzeni.

4.2 Operatory

Postulujemy, że każdej mierzalnej wielkości fizycznej (obserwabli) odpowiada operator hermitowski $\hat{Q}$, którego unormowane wektory własne $|q_i\rangle$ tworzą bazę w $\mathcal{H}$. Poniżej przedstawiamy podstawowe definicje i dyskutujemy podstawowe twierdzenia rachunku operatorowego.

4.2.1 Definicje, podstawowe własności

Operatorem na przetrzeni wektorowej $\mathcal{H}$ nazywamy odwzorowanie ketu $|\psi\rangle$ w ket $|\varphi\rangle$:

$$\hat{Q}\,|\psi\rangle = |\varphi\rangle\,. \tag{4.11}$$

Podobnie jak funkcje, operatory określone są w pewnej *dziedzinie*. Dwa operatory są równe, gdy

$$\hat{Q}_1\,|\psi\rangle = \hat{Q}_2\,|\psi\rangle \tag{4.12}$$

dla wszystkich $|\psi\rangle$ należących do ich dziedzin. W mechanice kwantowej ograniczamy się do pewnej klasy operatorów, mianowicie do operatorów liniowych:

$$\hat{Q}\,\left(c_1\,|\psi_1\rangle + c_2\,|\psi_2\rangle\right) = c_1\hat{Q}\,|\psi_1\rangle + c_2\hat{Q}\,|\psi_2\rangle\,, \tag{4.13}$$

gdzie $c_{1,2}$ są dowolnymi stałymi zespolonymi. Podobnie suma operatorów

$$\left(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2\right)|\psi\rangle = \hat{Q}_1\,|\psi\rangle + \hat{Q}_2\,|\psi\rangle\,. \tag{4.14}$$

Operator nazywamy zerowym, jeżeli dla dowolnego stanu $|\psi\rangle$ zachodzi

$$\hat{Q}\,|\psi\rangle = 0. \tag{4.15}$$

Operator możemy pomnożyć przez liczbę

$$\left(c\hat{Q}\right)|\psi\rangle = c\left(\hat{Q}\,|\psi\rangle\right). \tag{4.16}$$

Operatory możemy mnożyć

$$\left(\hat{Q}_1\hat{Q}_2\right)|\psi\rangle = \hat{Q}_1\left(\hat{Q}_2\,|\psi\rangle\right), \tag{4.17}$$

musimy jedank pamiętać, aby ket $|\varphi\rangle = \hat{Q}_2\,|\psi\rangle$ należał do dziedziny operatora $\hat{Q}_1$. Na ogół mnożenie operatorów nie jest przemienne:

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}.$$

Zdefiniujmy *komutator*

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Warto wymienić kilka użytecznych własności komutatorów:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{A},\hat{B}\right] &= -\left[\hat{B},\hat{A}\right], \quad \text{antysymetria},\\
[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}] &= [\hat{A},\hat{B}] + [\hat{A},\hat{C}], \quad \text{liniowość},\\
[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] &= \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}], \quad \text{„łączność”}.
\end{aligned}$$

Na koniec podajmy bardzo użyteczną tożsamość, tzw. *tożsamość Jaobiego*:

$$\left[\left[\hat{A},\hat{B}\right],\hat{C}\right] + \left[\left[\hat{B},\hat{C}\right],\hat{A}\right] + \left[\left[\hat{C},\hat{A}\right],\hat{B}\right] = 0. \tag{4.18}$$

Jeżeli dany jest operator liniowy $\hat{Q}$ w przestrzeni $\mathcal{H}$, to w przestrzeni sprzężonej $\mathcal{H}'$ odpowiada mu (na ogół inny) operator, który oznaczymy jako $\hat{Q}^\dagger$:

$$\hat{Q}\,|\psi\rangle = |\varphi\rangle \;\longleftrightarrow\; \langle\psi|\,\hat{Q}^\dagger = \langle\varphi|\,, \tag{4.19}$$

którego działanie na stany z $\mathcal{H}'$ wygodnie przyjąć, jako działanie w „lewo”. Operator $\hat{Q}^\dagger$ nazywamy operatorem sprzężonym po hermitowsku do operatora $\hat{Q}$. Jeżeli zachodzi

$$\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger \tag{4.20}$$

to taki operator nazywamy hermitowskim.

Z definicji (4.19) wynika, że

$$\left(\hat{Q}_2\hat{Q}_1\right)^\dagger = \hat{Q}_1^\dagger\hat{Q}_2^\dagger. \tag{4.21}$$

Dotychczas zdefiniowaliśmy kilka rodzajów iloczynów w przestrzeniach $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ oraz w przestrzeni operatorów nad $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}'$:

$$\langle\psi|\,\varphi\rangle\,,\; \hat{Q}\,|\psi\rangle\,,\; \langle\psi|\,\hat{Q}^\dagger,\; \hat{Q}_2\hat{Q}_1. \tag{4.22}$$

Zdefiniujmy jeszcze jeden iloczyn, tzw. *iloczyn zewnętrzny*, który z ketu i bra tworzy operator

$$\hat{X} = |\alpha\rangle \langle\beta| . \tag{4.23}$$

Rzeczywiście $\hat{X}$ działając na dowolny ket $|\psi\rangle$ przyporządkowuje mu ket $|\alpha\rangle$ pomnożony przez liczbę zespoloną $\langle\beta|\, \psi\rangle$:

$$\hat{X}\,|\psi\rangle = |\alpha\rangle\, \langle\beta|\, \psi\rangle . \tag{4.24}$$

Analogicznie

$$\langle\psi|\,\hat{X} = \langle\psi|\, \alpha\rangle\, \langle\beta| . \tag{4.25}$$

Łatwo dowieść, że

$$\hat{X}^\dagger = |\beta\rangle \langle\alpha| . \tag{4.26}$$

4.2.2 Elementy macierzowe, równanie własne, wektory bazowe, zmiana bazy

Zdefiniujmy elementy „macierzowe"[1] operatorów jako

$$Q_{\beta\alpha} = \langle\beta|\,\hat{Q}\,|\alpha\rangle \tag{4.27}$$

Korzystając ze wzorów (4.6) oraz (4.19) mamy

$$Q_{\beta\alpha} = \langle\beta| \left[\hat{Q}\,|\alpha\rangle\right] = \left\{\left[\langle\alpha|\,\hat{Q}^\dagger\right]|\beta\rangle\right\}^* = \langle\alpha|\,\hat{Q}^\dagger\,|\beta\rangle^* = \left\{Q^\dagger_{\alpha\beta}\right\}^* \tag{4.28}$$

Zatem między tak zdefinowanymi wielkościami, zachodzi relacja znanan nam z defincji mecierzy hermitowskich:

$$Q^\dagger_{\alpha\beta} = Q^*_{\beta\alpha}.$$

Operatory na ogół przekształcają dany ket w inny ket, ale może się zdarzyć, że uda nam się znaleźć zbiór ketów (ciągły lub dyskretny), które są wektorami własnymi danego operatora

$$\hat{Q}\,|q_i\rangle = q_i\,|q_i\rangle . \tag{4.29}$$

W równaniu (4.29) q_i jest liczbą zwaną *wartością własną*, a ket – oznaczony poprzez tę samą liczbę – jest odpowiadającym tej wartości własnej wektorem własnym. Indeks i numeruje wszystkie wektory własne danego operatora.

W mechanice kwantowej szczególną rolę odgrywają operatory hermitowskie ze względu na to, że ich wartości własne są rzeczywiste. Dzięki temu nadają się one do opisu wielkości fizycznych (obserwabli), które są liczbami rzeczywistymi. Pokażemy teraz, że wartości własne operatora hermitowskiego $\hat{A}$ są rzeczywiste. Rozważmy dwa równania własne

$$\hat{A}\,|a_i\rangle = a_i\,|a_i\rangle\,,\ \langle a_j|\,\hat{A} = a_j^*\,\langle a_j| . \tag{4.30}$$

Mnożąc te równania odpowiednio przez $\langle a_j|$ oraz $|a_i\rangle$ otrzymujemy odejmując stronami

$$\left(a_i - a_j^*\right)\langle a_j|\, a_i\rangle = 0. \tag{4.31}$$

Z równania tego można wyciągnąć dwa wnioski:

[1] Użyliśmy cudzysłowu, gdyż indeksy α i β nie są licznami naturalnymu numerującymi wiersze i kolumny.

- dla $i \neq j$ zachodzi $\langle a_j | a_i \rangle = 0$, czyli że wektory własne dla różnych wartości własnych są ortogonalne;
- dla $i = j$ zachodzi $a_i - a_i^* = 0$, czyli że wartości własne są rzeczywiste.

  Korzystając z własności (4.8) możemy zawsze skonstruować bazę ortonormalną

$$\langle a_j | a_i \rangle = \delta_{ji}. \tag{4.32}$$

Możemy teraz zadać pytanie, czy zbiór wektorów $|a_i\rangle$ jest kompletny, tzn. czy każdy wektor z przestrzeni Hilberta dla konkretnego problemu fizycznego związanego z obserwablą A daje się zapisać w postaci

$$|\alpha\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle . \tag{4.33}$$

Odpowiedź jest pozytywna, gdyż decydując się na daną obserwablę (lub kilka obserwabli) zakładamy, że rozwinięta na wektorach własnych przestrzeń Hilberta jest zupełna. Zauważmy, że współczyniki rozkładu c_i można wyrazić przez iloczyn skalarny

$$\langle a_j |\alpha\rangle = \sum_i c_i \underbrace{\langle a_j |a_i\rangle}_{=\delta_{ij}} = c_j. \tag{4.34}$$

Warunek zupełności gwarantuje, że operator jednostkowy można zapisać w postaci sumy

$$\mathbf{1} = \sum_j |a_j\rangle \langle a_j| . \tag{4.35}$$

Rzeczywiście, działając operatorem jednostkowym na stan (4.33)

$$|\alpha\rangle = \mathbf{1}\,|\alpha\rangle = \sum_j |a_j\rangle \langle a_j | \alpha\rangle = \sum_j c_j |a_j\rangle = |\alpha\rangle , \tag{4.36}$$

gdzie skorzytaliśmy z (4.34).

Na koniec zauważmy, że warunek normalizacyjny (4.8) dla stanu (4.33) przyjmuje postać

$$\langle \alpha |\alpha\rangle = \sum_{j,i} \langle a_j| c_j^* c_i |a_i\rangle = \sum_j |c_j|^2 = 1. \tag{4.37}$$

Jeżeli stany $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$ w równaniu (4.11) mają w pewnej bazie rozkłady

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |j\rangle , \ |\varphi\rangle = \sum_j f_j |j\rangle \tag{4.38}$$

to równanie (4.11) przyjmuje postać

$$\sum_i f_j |j\rangle = \sum_j c_j \hat{Q} |j\rangle . \tag{4.39}$$

Mnożąc to równanie z lewej strony przez $\langle i|$ i korzystając z ortonormalności bazy mamy

$$f_i = \sum_j \langle i| \hat{Q} |j\rangle c_j = \sum_j Q_{ij} c_j. \tag{4.40}$$

Zatem działanie operatora $\hat{Q}$ sprowadza się do mnożenia macierzowego wektora współczynników rozkładu przez macierz

$$Q_{ij} = \langle i| \hat{Q} |j\rangle$$

odpowiadającą temu operatorowi w wybranej bazie.

Pokażemy teraz, że jeśli

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0 \tag{4.41}$$

to operatory te mają wspólny układ stanów własnych.

$$\hat{A} |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle , \quad \hat{B} |b_i\rangle = b_i |b_i\rangle . \tag{4.42}$$

Czyli

$$|b_i\rangle = \sum_n |a_n\rangle \alpha_{ni}. \tag{4.43}$$

Rozważmy

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} |b_i\rangle &= b_i \hat{A} \sum_n |a_n\rangle \alpha_{ni} = b_i \sum_n |a_n\rangle a_n\alpha_{ni} = b_i |\psi\rangle \\ \hat{B}\hat{A} |b_i\rangle &= \hat{B} \sum_n |a_n\rangle a_n\alpha_{ni} = \hat{B} |\psi\rangle , \end{aligned} \tag{4.44}$$

gdzie

$$|\psi\rangle = \sum_n |a_n\rangle a_n\alpha_{ni}$$

Ponieważ $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$

$$\hat{B} |\psi\rangle = b_i |\psi\rangle \tag{4.45}$$

czyli

$$|\psi\rangle = c |b_i\rangle \implies \sum_n |a_n\rangle (c - a_n) \alpha_{ni} = 0. \tag{4.46}$$

Ponieważ a_n sa różne, nieskończoną sumę w równaniu (4.46) można wyzerować kładąc wszystkie współczynniki α_{ni} równe zeru, za wyjątkiem jednego, za który wygodnie wybrać

$$\alpha_{ni} = \frac{c}{a_n}\delta_{ni}.$$

Zatem

$$|b_i\rangle = c |a_i\rangle . \tag{4.47}$$

Z warunku unormowania $c = 1$. Wartości własne komutujących operatorów mogą służyć do kompletnego numerowania stanów.

Z kolei jeżeli

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \neq 0 \tag{4.48}$$

to operatory te nie mają wspólnego układu stanów własnych i stany te tworzą dwie różne ortonormalne bazy w przestrzeni Hilberta. Wówczas można pokazać, że istnieje transformacja unitarna ($U^\dagger U = UU^\dagger = 1$) przeprowadzająca jedną bazę w drugą

$$|b_i\rangle = \sum_j |a_j\rangle U_{ji}. \tag{4.49}$$

Operatotory $\hat{A}$ i $\hat{B}$ są diagonalne w swoich bazach. Ze wzoru (4.49) wynika, że operator $\hat{A}$ w bazie $\{|b_i\rangle\}$przyjmuje postać

$$A^{(b)}_{ik} = \langle b_i| \hat{A} |b_k\rangle = \sum_{j,l} U^\dagger_{ij} \langle a_j| A |a_l\rangle U_{lk} = \sum_{j,l} U^\dagger_{ij} A_{jl} U_{lk}. \tag{4.50}$$

Warto zauważyć, że wzór (4.50) stosuje się do wszyskich operatorów, a nie tylko do operatorów, które są w jednej z baz diagonalne

$$Q^{(b)}_{ik} = \sum_{j,l} U^\dagger_{ij} Q^{(a)}_{jl} U_{lk}, \tag{4.51}$$

gdzie zmiana bazy opisana jest transformacją (4.49). Widzimy zatem, że ten sam operator może mieć różne przedstawienia macierzowe (albo inaczej reprezentacje) w zależności od wyboru bazy.

Funkcja od operatora. Mamy daną funkcję liczbową $f(x)$. Wówczas

$$f(\hat{Q}) = \sum_i f(q_i) |i\rangle \langle i| . \tag{4.52}$$

Jeżeli znamy rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $f(x)$

$$f(x) = \sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)} x^n,$$
$$f(\hat{Q}) = \sum_n \frac{1}{n!} f^{(n)} \hat{Q}^n. \tag{4.53}$$

Ostatnie wyrażenie ma sens, bo operatory umiemy mnożyć. Można pokazć, że z (4.53) wynika (4.52).

Szczególną funkcją jest $1/x$:

$$\frac{1}{\hat{Q}} = \sum_i \frac{1}{q_i} |i\rangle \langle i| . \tag{4.54}$$

Pomnóżmy

$$\frac{1}{\hat{Q}}\hat{Q} = \sum_{i,j} \frac{q_j}{q_i} |i\rangle \underbrace{\langle i|\, j\rangle}_{\delta_{ij}} \langle j| = \sum_i |i\rangle \langle i| = \hat{I}. \tag{4.55}$$

Czyli

$$\frac{1}{\hat{Q}} = \hat{Q}^{-1}. \tag{4.56}$$

4.3 Pomiar i kolaps funkcji falowej

Postulujemy, że jeżeli układ znajduje się w stanie $|\psi(t)\rangle$, to pomiar obserwabli odpowiadającej operatorowi $\hat{Q}$ daje jedną z jego wartości własnych q_i z prawdopodobieństwem $|\langle q_i|\, \psi(t)\rangle|^2$. Postulujemy dalej, że następny pomiar na tym układzie musi dać ten sam wynik q_i z prawdopodobieństwem równym 1. Zatem w wyniku pierwszego pomiaru stan $|\psi(t)\rangle$ zmienił się w stan własny $|q_i(t)\rangle$. Zjawisko to nosi czasem nazwę kolapsu funkcji falowej. Jest to jeden z najbardziej kontrowersyjnych postulatów, który budził sprzeciw np. Einsteina.

4.4 Ewolucja czasowa stanów kwantowych

Często jako postulat dołącza się wasność, że ewolucja czasowa stanu fizycznego dana jest przez równanie Schrödingera:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle\,,$$

gdzie $\hat{H}$ jest hamiltonianem kwantowym skonstruowanym wg zasad postulatu 2. Postulat ten można zastąpić poprzez opis ewolucji w języku całek po trajektoriach.