

Materiały pomocnicze dla studentów fizyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

Mechanika Kwantowa

(wersja w opracowaniu, nie do rozpowszechniania bez zgody autora)

Michał Prasałowicz

16 marca 2021

1 Wstęp

Mechanika kwantowa została sformułowana w połowie lat dwudziestych XX wieku jako narzędzie opisu zjawisk mikroświata, tj. zjawisk zachodzących na skalę atomową i do dziś stanowi podstawową teorię zjawisk atomowych. Bezpośrednim bodźcem powstania mechaniki kwantowej był brak poprawnego opisu teoretycznego w ramach fizyki klasycznej szeregu faktów doświadczalnych, zgromadzonych z końcem XIX wieku. Do najważniejszych zaliczyć należy (oprócz oczywiście promieniowania atomów):

- promieniowanie ciała doskonale czarnego,
- efekt fotoelektryczny,
- efekt Comptona.

Okazało się, że energia jest emitowana (bądź absorbowana) nie w sposób ciągły, jak tego wymaga opis klasyczny, ale porcjami, czyli kwantami. Stąd wzięła się zresztą nazwa *mechanika kwantowa*. Oczywiście fakt emisji energii porcjami wymaga istnienia *porcji minimalnej* (inaczej możliwa byłaby emisja ciągła), a więc stałej przyrody, która określa wartość energii owej porcji minimalnej. Tą nową, odkrytą na początku stulecia stałą, jest tzw. stała Plancka:

$$h = 6.626075510 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.626075510 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}. \quad (1.1)$$

Warto zwrócić uwagę na to, jak mała jest to liczba. Ma ona wymiar *działania* (*energia·czas*). Podniesieniu 1 kg cukru na wysokość jednego metra w czasie 1 sekundy odpowiada w przybliżeniu działanie 1/10 J·s. Zatem o istnieniu minimalnej porcji energii w życiu codziennym można całkowicie zapomnieć. Dopiero badając zjawiska, dla których typowe wartości działania są porównywalne z h , ujawnia się istnienie *porcji podstawowej* i mechanika klasyczna przestaje się stosować. Rozumowanie to można odwrócić: jeśli w mechanice kwantowej formalnie wykonać przejście graniczne $h \rightarrow 0$, to prawa kwantowe powinny się zredukować do praw mechaniki klasycznej. Jest to treść sformułowanej przez Nielsa Bohra tzw. *zasady korespondencji*.

Drugą ideą teoretyczną jest tzw. *dualizm korpuskularno falowy*. Okazuje się, że niektóre doświadczenia dotyczące promieniowania elektromagnetycznego, które zgodnie fizyką klasyczną ma charakter falowy, można wytłumaczyć jedynie zakładając, że promieniowanie to składa się ze strumienia cząstek, tzw. fotonów (efekt fotoelektryczny). Z kolei strumienie cząstek, np. elektronów, wykazują charakter falowy (np. zjawisko dyfrakcji). Ta ostatnia idea pochodzi od Louis de Broglie'a.

Kolejnym aspektem mechaniki kwantowej odróżniającym ją od mechaniki klasycznej jest *nieistnienie trajektorii* ruchu cząstki w rozumieniu fizyki klasycznej. Wynika to z zasady nieoznaczoności Heisenberga, która mówi, że nie można jednocześnie określić położenia i pędu (a więc prędkości) cząstki.

W konsekwencji mechanika kwantowa jest teorią *probabilistyczną*, co oznacza, że teoretycznie możemy podać jedynie prawdopodobieństwo z jakim cząstka w danym momencie znajdzie się w danym punkcie przestrzeni.

Wspomniane wyżej idee teoretyczne zaowocowały w latach dwudziestych powstaniem pełnej, matematycznie poprawnej teorii – mechaniki kwantowej, sformułowanej niezależnie przez Erwina Schrödingera i Wernera Heisenberga. Teoria ta dawała nie tylko jakościowe, ale także ilościowe wytłumaczenie zjawisk atomowych.

Początek wieku XX to także powstanie szczególnej i ogólnej teorii względności Alberta Einsteina. Szczególna teoria względności jest w gruncie rzeczy kinematyczną konsekwencją prostego faktu doświadczalnego: stałości prędkości światła c . Słynny wzór Einsteina:

$$E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2 \quad (1.2)$$

podaje związek między energią a pędem i masą spoczynkową czastki swobodnej. Jest to związek między kwadratem energii a kwadratem pędu, gdy tymczasem związek klasyczny:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + const. \quad (1.3)$$

wiąże liniowo kwadrat pędu z energią. Mechanika kwantowa Schrödingera i Heisenberga nie respektuje zależności (1.2) i z tego względu jest teorią *nierelatywistyczną*. Sformułowanie teorii kwantowej respektującej związek Einsteina udało się Paulowi Dirakowi. Równanie Diraka ma dwie niesłychanie ważne konsekwencje: pojawienie się spinu, który w nierelatywistycznej mechanice kwantowej trzeba było wprowadzać „rękami” oraz przewidzenie istnienia antycząstek.

Inną konsekwencją szczególnej teorii względności jest to, że oddziaływania nie są natychmiastowe. Rzeczywiście, na przykład zmiana położenia jądra jest „wyczuwana” przez elektron po bardzo krótkim, ale jednak skończonym czasie. Ten aspekt teorii Einsteina nie jest zawarty w równaniu Diraka, które jest w gruncie rzeczy równaniem czastki swobodnej. Dalszym uogólnieniem relatywistycznej mechaniki kwantowej, które bierze pod uwagę i ten aspekt teorii względności jest relatywistyczna teoria pola.

Współczesne sformułowanie mechaniki kwantowej zawdzięczamy Richardowi Feynmanowi. Jest to podejście oparte o matematyczny formalizm tzw. *całek po trajektoriach*, który znajduje także zastosowanie w kwantowej teorii pola.

Cechą odróżniającą mechanikę kwantową od klasycznej, na której Feynman oparł swój formalizm, i która ma daleko idące konsekwencje rachunkowe i interpretacyjne jest probabilistyczny charakter mechaniki kwantowej.

2 Prawdopodobieństwo i amplitudy prawdopodobieństwa¹

2.1 Prawdopodobieństwo

Dla zjawisk powtarzalnych prawdopodobięstwo zdarzenia A można określić jako

$$n_A \simeq p_A N \quad (2.1)$$

¹Za wykładami Jamesa Binney i Davida Skinnera, Merton College, Oxford.

gdzie N jest całkowitą liczbą prób (np. rzutów kostką), a n_A jest liczbą przypadków, w których zaszło zdarzenie A (np. liczba rzutów kostką, w których wyszła jedynka). Dla skończonych N stosunek n_A/N fluktuuje z N . Prawdopodobieństwo p_A natomiast jest liczbą < 1 , która nie zależy od N . We wzorze (2.1) prawdopodobieństwo p_A należy wybrać tak, aby te fluktuacje malały ze wzrostem N .

Często mamy do czynienia ze zdarzeniami złożonymi. Jeśli A jest zdarzeniem, że rzucając kostką białą uzyskamy 1, a B że kostka czerwona pokaże 5, to zjawisko AB (rzucając dwie kostki, kostka biała pokazuje 1 i kostka czerwona 5) zachodzi z prawdopodobieństwem

$$p(A \text{ i } B) = p_{A*B} = p_A p_B. \quad (2.2)$$

Wzór (2.2) jest prawdziwy, tylko gdy zdarzenia A i B są *niezależne* (wynik rzutu kostką białą nie wpływa na wynik rzutu kostką czerwoną).

W jednym rzucie kostką możliwy jest tylko jeden wynik. Dlatego otrzymanie 1 w rzucie kostką białą (zdarzenie A) wyklucza otrzymanie 2 (zdarzenie C); A i C są zdarzeniami *rozłącznymi*. Prawdopodobieństwo, że w rzucie białą kostką otrzymamy 1 lub 2 jest sumą

$$p(A \text{ lub } B) = p_{A+B} = p_A + p_B. \quad (2.3)$$

W rzucie kostką mamy $n = 6$ możliwych zdarzeń: otrzymanie 1 lub 2 lub ... lub 6. Ponieważ nic innego nie może się stać, prawdopodobieństwo

$$p(1 \text{ lub } 2 \text{ lub } 3 \dots \text{ lub } n) = 1 = \sum_{i=1}^n p_i. \quad (2.4)$$

Jeżeli wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne

$$p_i = \frac{1}{n}. \quad (2.5)$$

2.2 Wartość oczekiwana

Zmienna losowa x to wielkość, którą mierzymy, a wartość którą otrzymujemy w wyniku pomiaru pojawia się z pewnym prawdopodobieństwem. Pozostając przy przykładzie *dyskretnym* (rzuty kostką), zmienna losowa x_i może przyjmować wartości od $x_1 = 1$ do $x_6 = 6$. *Wartość oczekiwana* zdefiniowana jest jako:

$$\langle x \rangle = \sum_i x_i p_i. \quad (2.6)$$

Dla zdarzeń powtarzalnych, *średnia* wartość \bar{x} uzyskana w N próbach dąży do $\langle x \rangle$ gdy N jest bardzo duże.

Dla dwóch (lub więcej) zmiennych losowych, x oraz y , niech p_{ij} będzie prawdopodobieństwem, że w pomiarze x otrzymamy wynik x_i , a w pomiarze y wynik y_j . Wartość

oczekiwana sumy wynosi

$$\begin{aligned}\langle x + y \rangle &= \sum_{i,j} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i,j} x_i p_{ij} + \sum_{i,j} y_j p_{ij} \\ &= \sum_i x_i \sum_j p_{ij} + \sum_j y_j \sum_i p_{ij}.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Ale $\sum_j p_{ij}$ jest prawdopodobieństwem otrzymania x_i bez względu na to jaki jest wynik pomiaru y . Zatem

$$\sum_j p_{ij} = p_i^{(x)}, \quad \sum_i p_{ij} = p_j^{(y)},\quad (2.8)$$

czyli

$$\langle x + y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle.\quad (2.9)$$

Wartość oczekiwana sumy dwóch zmiennych losowych jest sumą ich wartości oczekiwanych, bez względu czy są to zmienne losowe niezależne.

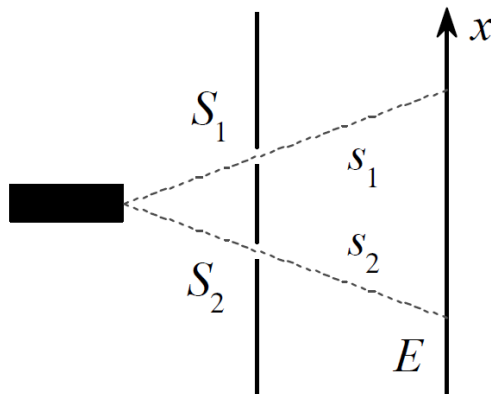
Miarą *fluktuacji* zmiennej losowej jest *wariancja*:

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2 \langle x \rangle \langle x \rangle + \langle \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.\quad (2.10)$$

2.3 Amplitudy prawdopodobieństwa

Wiele dziedzin naukowych posługuje się rachunkiem prawdopodobieństwa, ale mechanika kwantowa odróżnia się od nich sposobem, w jaki wylicza się prawdopodobieństwa. Bowiem tylko w mechanice kwantowej prawdopodobieństwo p jest dane jako kwadrat modułu pewnej liczby zespolonej A zwanej amplitudą prawdopodobieństwa:

$$p = |A|^2.\quad (2.11)$$



Rysunek 1: Eksperyment z dwoma szczelinami.

W mechanice kwantowej omówione powyżej własności prawdopodobieństwa przenoszą się na amplitudy, co pociąga za sobą pojawianie się nowych zjawisk, które nie mają analogii w fizyce klasycznej. Przypuśćmy, że pewne zjawisko może zajść na dwa rozłączne sposoby s_1 lub s_2 , z których każdy opisany jest amplitudą prawdopodobieństwa $A(s_2)$ oraz $A(s_1)$. Dla ustalenia uwagi, rozważmy działo elektronowe, z którego wystrzelujemy elektrony w kierunku ekranu E . Przed ekranem w odległości L znajduje się przesłona z dwoma szczelinami $S_{1,2}$. Rozumując klasycznie, elektron wystrzelony z działka może dostać się do ekranu albo przez szczelinę S_1 (trajektoria s_1), albo przez szczelinę S_2 (trajektoria s_2). Kwantowo amplituda prawdopodobieństwa, że elektron dotarł do ekranu którąkolwiek drogą wynosi:

$$A(s_1 \text{ lub } s_2) = A(s_1) + A(s_2). \quad (2.12)$$

Ta zasada zastępuje zasadę dodawania prawdopodobieństw (2.3). Jest ona jednak sprzeczna z równaniem (2.3) gdyż prawdopodobieństwo dotarcia elektronu do ekranu nie jest sumą prawdopodobieństw przejścia przez szczelinę S_1 i S_2 . Rzeczywiście:

$$\begin{aligned} p(s_1 \text{ lub } s_2) &= |A(s_1 \text{ lub } s_2)|^2 = |A(s_1) + A(s_2)|^2 \\ &= |A(s_1)|^2 + |A(s_2)|^2 + (A^*(s_1)A(s_2) + A(s_1)A^*(s_2)) \\ &= p(s_1) + p(s_2) + 2 \operatorname{Re}(A^*(s_1)A(s_2)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ostatni człon $2 \operatorname{Re}(A^*(s_1)A(s_2))$ odróżnia wynik klasyczny od kwantowego. Zauważmy, że zależy on od względnej fazy amplitud $A(s_1)$ i $A(s_2)$, podczas gdy w $p(s_1)$ i $p(s_2)$ fazy nie występują. Rzeczywiście, jeśli

$$A = |A| e^{i\varphi}$$

mamy

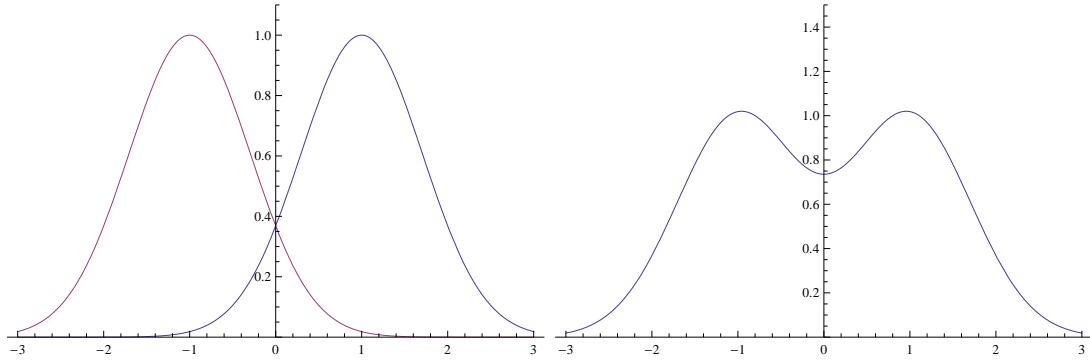
$$\begin{aligned} (A^*(s_1)A(s_2) + A(s_1)A^*(s_2)) &= |A(s_1)| |A(s_2)| [e^{i(\varphi(s_2)-\varphi(s_1))} + e^{-i(\varphi(s_2)-\varphi(s_1))}] \\ &= 2 |A(s_1)| |A(s_2)| \cos(\varphi(s_2) - \varphi(s_1)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Człon ten jest odpowiedzialny za kwantową interferencję. Zauważmy, że człon interferencyjny pojawia się tylko wtedy, kiedy nie wiemy, przez którą szczelinę przeleciał elektron.

Spróbujemy zastanowić się, jak wygląda rozkład prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w zmiennej x wzdłuż ekranu E . Oznaczając odpowiednie prawdopodobieństwa indeksami 1 lub 2 mamy

$$\begin{aligned} p(x) &= p_1(x) + p_2(x) + I(x), \\ I(x) &= 2\sqrt{p_1(x)p_2(x)} \cos(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Choć nie dysponujemy jeszcze formalizmem, żeby wyliczyć $p(x)$, to można przyjąć, że prawdopodobieństwa $p_{1,2}(x)$ są funkcjami „wypikowanymi” wokół klasycznego obrazu szczelin na ekranie E , tak jak to przedstawia rysunek 2. Suma prawdopodobieństw jest więc funkcją o 2 maksimach.

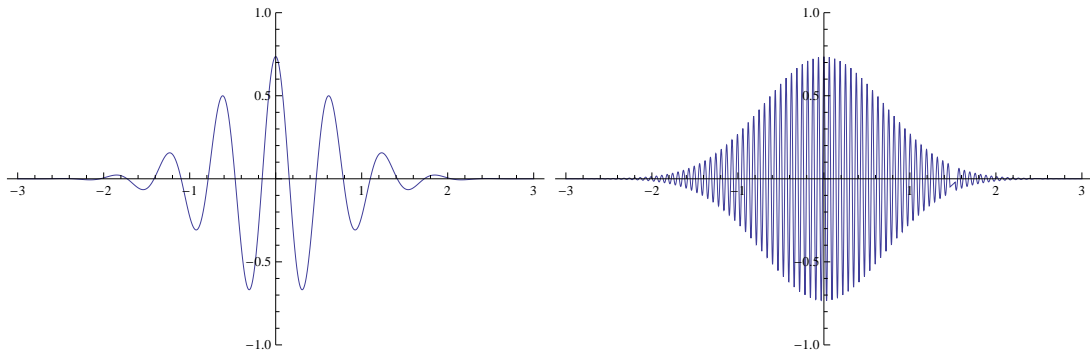


Rysunek 2: Prawdopodobieństwo jako suma dwóch funkcji Gaussa .

Z kolei, aby wyliczyć człon interferencyjny, musimy założyć coś o zależności faz $\varphi_{1,2}$ od x . Jak się przekonamy, zależność ta z dobrym przybliżeniem jest liniowa. Zatem

$$I(x) = 2\sqrt{p_1(x)p_2(x)} \cos(\alpha x), \quad (2.16)$$

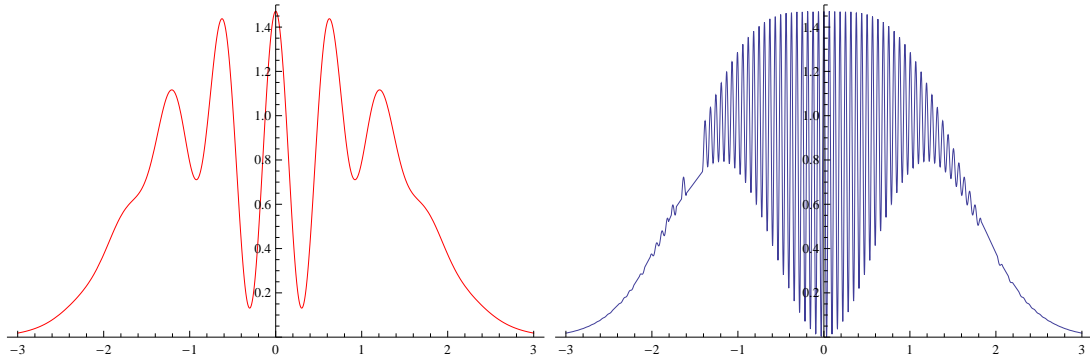
gdzie stała α zależy od energii i masy wystrzeliwanych cząstek, odległości ekranu od szczeliny itd. Okazuje się, że dla rozsądnych wartości tych wszystkich parametrów typowa odległość między maksimami oscylującej funkcji $I(x)$ dla działka elektronowego jest rzędu ułamków milimetra, zaś dla zwykłej strzelby na „klasyczne” naboje, odległość ta jest niewyobrażalnie mała, rzędu 10^{-29} m! Sytuacja ta jest przedstawiona na rysunku 3.



Rysunek 3: Człon interferencyjny: z lewej przypadek kwantowy z prawej klasyczny .

Dodając człon interferencyjny do sumy prawdopodobieństw $p_1(x) + p_2(x)$ otrzymujemy rozkład pokazany na rysunku 4. A zatem człon interferencyjny jest wyraźnie widoczny zarówno dla przypadku z elektronami jak i ze zwykłymi kulami. Jednakże w przypadku klasycznym oscylacje są tak gęste, że nie jesteśmy w stanie ich zaobserwować, gdyż rozdzielczość aparatury pomiarowej jest rzędu wielkości większa niż okres oscylacji. W rzeczywistości mierzony rozkład jest średnią

$$p_{\text{exp}}(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} dx' p(x') \quad (2.17)$$



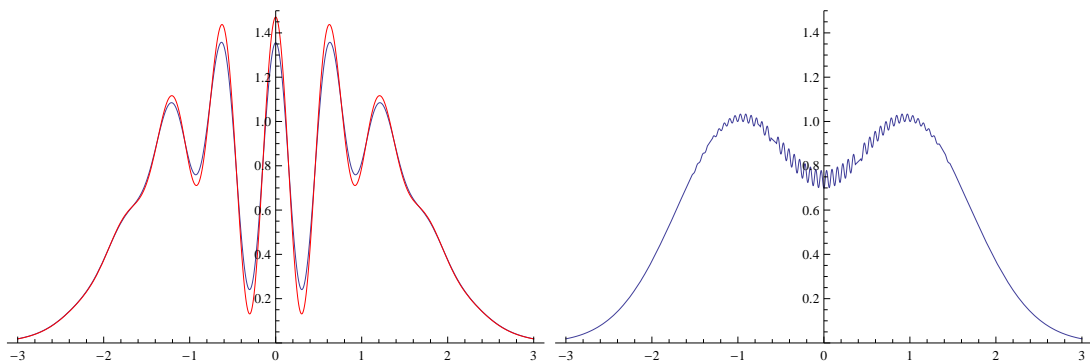
Rysunek 4: Prawdopodobieństwo z członem interferencyjnym: z lewej przypadek kwantowy z prawej klasyczny .

gdzie δ jest rozdzielczością aparaturową. Wynik takiego uśrednienia jest pokazany na rysunku 5. Widzimy, że dla przypadku kwantowego takie uśrednienie praktycznie nie zmienia rozkładu prawdopodobieństwa $p(x)$ (krzywa czerwona) i mamy

$$p_{\text{exp}}(x) \simeq p(x). \quad (2.18)$$

Natomiast w przypadku kwantowym uśrednianie praktycznie całkowicie wyzerowuje człon interferencyjny, tak że

$$p_{\text{exp}}(x) \simeq p_1(x) + p_2(x). \quad (2.19)$$



Rysunek 5: Uśrednione prawdopodobieństwo z członem interferencyjnym: z lewej przypadek kwantowy (czerwona linia bez uśrednienia), z prawej klasyczny.

3 Ewolucja układu w czasie, trajektorie kwantowe

Amplitudę prawdopodobieństwa określającą rozkład położenia cząstki w przestrzeni w określonej chwili czasowej t nazywamy *funkcją falową* i oznaczamy $\psi(x, t)$. Pytanie: jak ewoluuje w czasie funkcja falowa stanu kwantowego? Najpierw zajmiemy się ruchem cząstki w jednym wymiarze.

3.1 Trajektorie klasyczne

Klasyczne równania trajektorii cząstki opisanej funkcją Lagrange'a

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \quad (3.1)$$

wyprowadza się z zasady najmniejszego działania. Działanie zdefiniowane jest jako

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{x}, x, t) dt. \quad (3.2)$$

Klasyczną trajektorię $\bar{x}(t)$ otrzymuje się z żądania, aby dla S było minimalne. Rozważmy inną trajektorię

$$x(t) = \bar{x}(t) + y(t), \quad y(t_1) = y(t_2) = 0, \quad (3.3)$$

przy czym

$$\bar{x}(t_1) = x_1, \quad \bar{x}(t_2) = x_2.$$

Wyliczmy działanie dla trajektorii (3.3) z dokładnością do wyrazów liniowych w y :

$$\begin{aligned} S[\bar{x} + y] &= \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\bar{x}} + \dot{y}, \bar{x} + y, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, t) + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + y \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \\ &= S[\bar{x}] + \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} \right] y dt. \end{aligned}$$

Zarządzamy teraz aby człon liniowy w y zerował się:

$$\delta S \equiv S[\bar{x} + y] - S[\bar{x}] = 0 \quad (3.4)$$

dla dowolnego y . Stąd otrzymujemy klasyczne równania ruchu

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

których rozwiązaniem jest klasyczna trajektoria $\bar{x}(t)$. Odpowiadające jej działanie nazywamy działaniem klasycznym:

$$S_{cl} = S[\bar{x}]$$

Trajektorie różne od $\bar{x}(t)$ charakteryzują się na ogół działaniem znacznie większym od S_{cl} , za wyjątkiem trajektorii bardzo bliskich $\bar{x}(t)$, dla których na mocy warunku (3.4) działanie jest praktycznie równe S_{cl} .

3.2 Ewolucja jako sumowanie po trajektoriach

W mechanice klasycznej stwierdzenie, że cząstka w chwili t_a znajduje się w punkcie x_a jest jak najbardziej uprawnione, w mechanice kwantowej możemy mówić tylko o prawdopodobieństwie znalezienia cząstki w punkcie x_a . W mechanice klasycznej w chwili t_b cząstka znajdzie się w punkcie $x_b = \bar{x}(t_b)$. Postawmy pytanie: jak w mechanice kwantowej wygląda prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w punkcie x_b w chwili t_b , jeśli znamy amplitudę prawdopodobieństwa w chwili t_a ? Odpowiedź na to pytanie podał R.P. Feynman, który zapostulował, że szukana amplituda prawdopodobieństwa $\psi(x_b, t_b)$ dana jest wzorem

$$\psi(x_b, t_b) = \int dx_a \sum_{\substack{\text{trajektorie} \\ \text{od } x_a \text{ do } x_b}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_a \rightarrow x_b]} \psi(x_a, t_a). \quad (3.5)$$

Przeanalizujmy wzór (3.5). Najpierw ustalamy punkt x_a i konstruujemy *wszystkie* trajektorie prowadzące od $x_a \rightarrow x_b$. Dla każdej takiej trajektorii wyliczamy działanie $S[x_a \rightarrow x_b]$. Następnie wykonujemy sumę czynników fazowych dla wszystkich trajektorii i mnożymy wynik przez $\psi(x_a, t_a)$. Całą tę procedurę powtarzamy dla *wszystkich* x_a . Interpretując tę procedurę w języku fizyki klasycznej, możemy powiedzieć, że cząstka dochodzi do x_b po *wszystkich możliwych trajektoriach*. Z kolei największy przyczynek pochodzi od trajektorii klasycznej i bliskich jej trajektorii, ponieważ dla nich działanie jest prawie stałe. Dla pozostałych trajektorii działanie zmienia się i czynniki fazowe $\exp(i/\hbar S)$ będą się w praktyce znosić. Wielkość

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_{\substack{\text{trajektorie} \\ \text{od } x_a \text{ do } x_b}} e^{\frac{i}{\hbar} S[x_a \rightarrow x_b]} \quad (3.6)$$

nazywamy *propagatorem*.

3.3 Interferencja fal materii

Przeanalizujmy teraz prosty przykład jednowymiarowy, który pozwoli nam zrozumieć istotę eksperymentu z interferencją fal materii. Rozważmy propagację od $t_a \rightarrow t_b$ i dalej $t_b \rightarrow t_c$. Zgodnie z (3.5) i (3.6)

$$\psi(x_c, t_c) = \int dx_b K(c, b) \psi(x_b, t_b) = \int dx_b K(c, b) \int dx_a K(b, a) \psi(x_a, t_a). \quad (3.7)$$

Jest to bardzo ważny wzór określający prawo składania propagatorów:

$$K(c, a) = \int dx_b K(c, b) K(b, a). \quad (3.8)$$

Załóżmy teraz, że w chwili t_b wstawiamy ekran z dwoma małymi szczelinami wokół ξ i $-\xi$. Następnie w chwili t_c obserwujemy rozkład cząstek na osi x . Przy tak zrealizowanym

eksperymentem mamy pewność, że cząstka przeszła przez którąś ze „szczelin” w $\pm\xi$. Wzór (3.7) przyjmuje wówczas postać

$$\begin{aligned}\psi(x_c, t_c) = & \int_{-\xi-\varepsilon}^{-\xi+\varepsilon} dx_b K(c, b) \int dx_a K(b, a) \psi(x_a, t_a) \\ & + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} dx_b K(c, b) \int dx_a K(b, a) \psi(x_a, t_a).\end{aligned}\quad (3.9)$$

A zatem funkcja falowa w chwili t_c ma dwie składowe: jedną odpowiadającą przejściu przez szczelinę $-\xi$ i drugą odpowiadającą przejściu przez szczelinę ξ :

$$\psi(x_c, t_c) = \psi_{-\xi}(x_c, t_c) + \psi_{\xi}(x_c, t_c).\quad (3.10)$$

Jest to odpowiednik znanego nam już wzoru na dodawanie amplitud. Obliczając $|\psi(x_c, t_c)|^2$ otrzymujemy 4 człony

$$\begin{aligned}|\psi(x_c, t_c)|^2 = & |\psi_{-\xi}(x_c, t_c)|^2 + |\psi_{\xi}(x_c, t_c)|^2 \\ & + \psi_{-\xi}^*(x_c, t_c)\psi_{\xi}(x_c, t_c) + \psi_{\xi}^*(x_c, t_c)\psi_{-\xi}(x_c, t_c).\end{aligned}\quad (3.11)$$

Dwa ostatnie człony odpowiedzialne są za interferencję.

Warto w tym miejscu zrobić dwie uwagi. Po pierwsze przez cały czas rozpatrywaliśmy propagację *jednej* cząstki. Interferencja jest tu wynikiem faktu nieistnienia toru cząstki w mechanice kwantowej i konieczności uwzględnienia wszystkich trajektorii między punktem początkowym a końcowym. Po drugie, jeśli w jakiś sposób stwierdzilibyśmy, że cząstka w chwili t_b przeszła np. przez szczelinę ξ , to wówczas nie mielibyśmy całkowania wokół $-\xi$ i tym samym nie byłoby interferencji.

Na koniec podamy jakościowy argument za tym, że interferencja zachodzi tylko dla bardzo wąskich szczelin, tj. dla małych ε . Jeżeli ε jest „duże”, to przez szczelinę przechodzi wiązka trajektorii bliskich klasycznej, dla których działanie jest prawie stałe i w związku z tym możemy zaniedbać przyczynki od trajektorii dalekich od trajektorii klasycznej. Wówczas uzyskany obraz nie będzie różnił się od klasycznego i falowa natura cząstek się nie ujawni. Z kolei wąska szczelina „odfiltruje” większość trajektorii bliskich trajektorii klasycznej i w związku z tym powstały za nią obraz będzie w pełni kwantowy, tzn. wszystkie trajektorie dadzą jednakowy przyczynek i powstanie obraz interferencyjny.