Mechanika Kwantowa III rok

kolokwium

poniedziałek 24.12.2021 i wtorek 25.12.2021. godz. 14:15

1. Cząstka o spinie 1 znajduje się w chwili $t = 0$ w stanie [At t =0 particle of spin 1 is in a state]

$$|\psi\rangle = \alpha\,|1,+1\rangle + \beta\,|1,-1\rangle + \gamma\,|1,0\rangle\,.$$

Dobrać współczynniki α, β i γ aby stan $|\psi\rangle$ był znormalizowanym stanem własnym operatora L_x, L_y do wartości własnej $+1$ (przyjjmujemy $\hbar = 1$) [choose α, β and γ in such a way that $|\psi\rangle$ is a normalized eigenstate of L_x, L_y of eigenvalue $+1$ (we put $\hbar = 1$)]. W chwili $t = 0$ włączamy stałe pole magnetyczne B skierowane wzdłuż osi z. Hamiltonian tego systemu ma zatem postać: [At $t = 0$ one switches on the magnetic field B along the z axis. The hamiltonian of the system reads then:]

$$H = -\mu\,\vec{B}\cdot\vec{L}.$$

Jaka jest średnia wartość $\langle\psi(t)|\,L_{x,y}\,|\psi(t)\rangle$ w chwili $t > 0$? [What is the average value $\langle\psi(t)|\,L_{x,y}\,|\psi(t)\rangle$ at time $t > 0$?

WSKAZÓWKA [HINT]:

Wyrazić $L_{x,y}$ przez $L_\pm$. [Express $L_{x,y}$ in terms of $L_\pm$.]

ROZWIĄZANIE

Mamy

$$\begin{aligned} L_x &= \frac{1}{2}(L_+ + L_-). \\ L_y &= \frac{1}{2i}(L_+ - L_-). \end{aligned}$$

Użyjemy

$$L_\pm\,|1,\mp 1\rangle = \sqrt{2}\,|1,0\rangle\,,\; L_\pm\,|1,0\rangle = \sqrt{2}\,|1,\pm 1\rangle\,.$$

Mamy

$$\begin{aligned} L_+\,|\psi\rangle &= \beta\sqrt{2}\,|1,0\rangle + \gamma\sqrt{2}\,|1,+1\rangle\,, \\ L_-\,|\psi\rangle &= \alpha\sqrt{2}\,|1,0\rangle + \gamma\sqrt{2}\,|1,-1\rangle\,. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} L_x\,|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma\,|1,+1\rangle + \gamma\,|1,-1\rangle + (\beta+\alpha)\,|1,0\rangle\right). \\ L_y\,|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\gamma\,|1,+1\rangle - \gamma\,|1,-1\rangle + (\beta-\alpha)\,|1,0\rangle\right). \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} L_x \quad &: \quad \frac{\gamma}{\sqrt{2}} = \alpha = \beta \;\rightarrow |\psi\rangle = \alpha\left(|1,+1\rangle + |1,-1\rangle + \sqrt{2}\,|1,0\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\left(|1,+1\rangle + |1,-1\rangle + \sqrt{2}\,|1,0\rangle\right). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_y \quad &: \quad \frac{\gamma}{\sqrt{2}i} = \alpha = -\beta \ \rightarrow |\psi\rangle = \alpha \Big(|1,+1\rangle - |1,-1\rangle + i\sqrt{2}\,|1,0\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(|1,+1\rangle - |1,-1\rangle + i\sqrt{2}\,|1,0\rangle \Big) .
\end{aligned}
$$

Inna możliwość, to diagonalizacja macierzy

$$
L_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \ L_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} .
$$

Ewolucja czasowa

$$
|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \ \Big(|1,+1\rangle \ e^{-i\mu Bt} + |1,-1\rangle \ e^{+i\mu Bt} + \sqrt{2}\,|1,0\rangle \Big)
$$

$$
|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \ \Big(|1,+1\rangle \ e^{-i\mu Bt} - |1,-1\rangle \ e^{+i\mu Bt} + i\sqrt{2}\,|1,0\rangle \Big)
$$

Działanie $L_{x,y}$

$$
\begin{aligned}
L_x\,|\psi(t)\rangle \quad &= \quad \frac{1}{4} \ \Big(\sqrt{2}\,|1,0\rangle \ e^{-i\mu Bt} + \sqrt{2}\,|1,0\rangle \ e^{+i\mu Bt} + 2\,|1,-1\rangle + 2\,|1,+1\rangle \Big) \\
&= \quad \frac{1}{2} \Big(\sqrt{2}\,|1,0\rangle \ \cos(\mu Bt) + |1,-1\rangle + |1,+1\rangle \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_y\,|\psi(t)\rangle \quad &= \quad \frac{1}{4i} \ \Big(-\sqrt{2}\,|1,0\rangle \ e^{-i\mu Bt} - \sqrt{2}\,|1,0\rangle \ e^{+i\mu Bt} + i2\,|1,+1\rangle - i2\,|1,-1\rangle \Big) \\
&= \quad \frac{1}{2i} \Big(-\sqrt{2}\,|1,0\rangle \cos(\mu Bt) + i\,|1,+1\rangle - i\,|1,-1\rangle \Big) .
\end{aligned}
$$

Średnie

$$
\begin{aligned}
\langle\psi(t)|\, L_x\,|\psi(t)\rangle \quad &= \quad \frac{1}{4} \Big(\langle 1,+1|\, e^{+i\mu Bt} + \langle 1,-1|\, e^{-i\mu Bt} + \sqrt{2}\,\langle 1,0| \Big) \\
&\quad\ \times \Big(\sqrt{2}\,|1,0\rangle \ \cos(\mu Bt) + |1,-1\rangle + |1,+1\rangle \Big) \\
&= \quad \frac{1}{4} \left(e^{+i\mu Bt} + e^{-i\mu Bt} + 2\cos(\mu Bt) \right) \\
&= \quad \cos(\mu Bt) .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\psi(t)|\, L_y\,|\psi(t)\rangle \quad &= \quad -\frac{i}{4} \ \Big(\langle 1,+1| \ e^{+i\mu Bt} - \langle 1,-1| \ e^{-i\mu Bt} - i\sqrt{2}\,\langle 1,0| \Big) \\
&\quad\ \times \Big(-\sqrt{2}\,|1,0\rangle \cos(\mu Bt) + i\,|1,+1\rangle - i\,|1,-1\rangle \Big) \\
&= \quad -\frac{i}{4} \left(ie^{+i\mu Bt} + ie^{-i\mu Bt} + 2i\cos(\mu Bt) \right) \\
&= \quad \cos(\mu Bt) .
\end{aligned}
$$

2. Cząstka o ładunku elektrycznym e zamknięta w nieskończonej, kednowymiarowej studni potencjału o długości L znajduje się w stanie podstawowym, w pierwszym stanie wzbudzonym. W chwili $t = 0$ zostaje włączone pole elektryczne $\mathcal{E}e^{-\Gamma t}$. Napisać hamiltonian oddziaływania i obliczyć w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo, że w chwili $t \to \infty$ cząstka będzie w pierwszym stanie wzbudzonym, w stanie podstawowym.

   [Particle of positive charge e moving in one dimensional, infinte square well of size L,at time $t = 0$ is in the ground state. At $t = 0$ the one switches on the electric field $\mathcal{E}e^{-\Gamma t}$. Write the corresponding interaction hamiltonian and calculate on the first order of perturbation theory a probability that at time $t \to \infty$the particle will be in the first excited state.]

   WSKAZÓWKA [HINT]

   Pojawiającą się w tym zadaniu całkę oznaczmy [The integral that appears in this problem denote as]

$$\int_0^\pi dz\, z \sin(z) \sin(2z) = \beta.$$

   Proszę obliczyć tę całkę, jeżeli bedą Państwo mieli czas, po rozwiązaniu pozostałych zadań. [Compute this integral only when you have solved the remaining problems.]

   ROZWIĄZANIE

   Przyjmujemy studnię w obszarze $0 < x < L$. Warunek kwantyzacji

$$\sin(kL) = 0 \;\to\; k = \frac{n\pi}{L}.$$

   Energie

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}.$$

   Różnica energii

$$\Delta\omega \equiv \omega_{21} = \frac{1}{\hbar}\Delta E_{21} = \frac{1}{\hbar}\left(E_2 - E_1\right) = \frac{3\pi^2\hbar}{2mL^2}.$$

   Unormowane funkcje falowe

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

   Hamiltonian

$$H' = -e\mathcal{E}xe^{-\Gamma t}$$

   Amplituda przejścia

$$a = e\mathcal{E}\frac{i}{\hbar}\left\langle 2\right| x \left|1\right\rangle \int_0^\infty dt\, e^{(i\Delta\omega - \Gamma)t} = e\mathcal{E}\frac{i}{\hbar}\left\langle 2\right| x \left|1\right\rangle \frac{1}{\Gamma - i\Delta\omega}.$$

Trzeba policzyć element macierzowy

$$\begin{aligned}
\langle 2|\, x\, |1\rangle &= \frac{2}{L}\int\limits_0^L dx\, x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \\
&= \frac{2L}{\pi^2}\underbrace{\int\limits_0^\pi dz\, z\sin(z)\sin(2z)}_{\beta=-8/9} = -\frac{16L}{9\pi^2} \\
\text{gdzie } z &= \frac{x\pi}{L}
\end{aligned}$$

Stąd

$$a = e\mathcal{E}\frac{i}{\hbar}\frac{2L}{\pi^2}\beta\frac{1}{\Gamma - i\Delta\omega}$$

Całkę obliczamy rozkładając na exponenty i przyjmując na końcu $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\pi dz\, z\sin(z)\sin(2z) &= -\frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^\pi dz\, \cos(\alpha z)\sin(2z) \\
&= -\frac{1}{4i}\int\limits_0^\pi dz\left(e^{i\alpha z} + e^{-i\alpha z}\right)\left(e^{i2z} - e^{-i2z}\right) \\
&= -\frac{1}{4i}\frac{d}{d\alpha}\int\limits_0^\pi dz\left(e^{i(\alpha+2)z} - e^{i(\alpha-2)z} + e^{i(-\alpha+2)z} - e^{i(-\alpha-2)z}\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{e^{i(\alpha+2)\pi}-1}{\alpha+2} - \frac{e^{i(\alpha-2)\pi}-1}{\alpha-2} - \frac{e^{-i(\alpha-2)\pi}-1}{\alpha-2} + \frac{e^{-i(\alpha+2)\pi}-1}{\alpha+2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{\cos((\alpha+2)\pi)-1}{\alpha+2} - \frac{\cos((\alpha-2)\pi)-1}{\alpha-2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos((\alpha+2)\pi)-1}{(\alpha+2)^2} - \frac{\pi\sin((\alpha+2)\pi)}{\alpha+2}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\cos((\alpha-2)\pi)-1}{(\alpha-2)^2} + \frac{\pi\sin((\alpha-2)\pi)}{\alpha-2}\right\} \\
&\underset{\alpha=1}{=} \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{9} + 0 - \frac{2}{1} + 0\right\} = -\frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$a = -e\mathcal{E}\frac{i}{\hbar}\frac{16L}{9\pi^2}\frac{1}{\Gamma - i\Delta\omega},$$

a stąd

$$P = \left(e\mathcal{E}\frac{16L}{9\pi^2\hbar}\right)^2\frac{1}{\Delta\omega^2 + \Gamma^2}.$$

3. Obliczyć w przybliżeniu Borna różniczkowy przekrój czynny na rozpraszanie cząstki o masie m na potencjale

[Calculate in the Born approximation a differential cross-section for the scattering of a particle of mass m on the potential]

$$V(r) = V_0 e^{-\beta r.}$$

ROZWIĄZANIE

W przyblizeniu Borna

$$A_{fi} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3 r e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r)$$

gdzie

$$\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i.$$

Wykonujemy całki po kątach, a potem po dr ($x = \cos\theta$):

$$\begin{aligned}
A_{fi} &= -\frac{mV_0}{\hbar^2}\int dr r^2 e^{-\beta r}\int_{-1}^{1} dx e^{-iqrx} \\
&= -\frac{mV_0}{\hbar^2}\int dr r^2 e^{-\beta r}\frac{1}{-iqr}\left(e^{-iqr} - e^{+iqr}\right) \\
&= \frac{mV_0}{i\hbar^2 q}\int_0^\infty dr\, r e^{-\beta r}\left(e^{-iqr} - e^{+iqr}\right).
\end{aligned}$$

Korzystamy ze wzoru

$$\int_0^\infty dr\, r e^{-(\beta\pm iq)r} = -\frac{d}{d\beta}\int_0^\infty dr\, e^{-(\beta\pm iq)r} = -\frac{d}{d\beta}\frac{1}{\beta\pm iq} = \frac{1}{(\beta\pm iq)^2}.$$

Mamy

$$\int_0^\infty dr\, r e^{-\beta r}\left(e^{-iqr} - e^{+iqr}\right) = \frac{1}{(\beta+iq)^2} - \frac{1}{(\beta-iq)^2} = \frac{-4iq\beta}{(q^2+\beta^2)^2}.$$

Ostateczne

$$A_{fi} = -\frac{mV_0}{\hbar^2}\frac{4\beta}{(q^2+\beta^2)}.$$

Stąd

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{mV_0}{\hbar^2}\frac{4\beta}{(q^2+\beta^2)^2}\right]^2$$