Mechanika Kwantowa III rok

kolokwium

poniedziałek 13.12.2021 i wtorek 14.12.2021. godz. 14:15

1. Spoczywający elektron (np. w węźle sieci krystalicznej) jest poddany stałemu polu magnetycznemu skierowanemu, wzdłuż osi x, wzdłuż osi y. Podać hamiltonian oddziaływania, a następnie znaleźć energie własne i wektory własne. W chwili $t = 0$ elektron znajduje się w stanie o $S_z = \hbar/2$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w chwili $t > 0$ elektron ma $S_y = \hbar/2$, $S_x = -\hbar/2$.

ROZWIĄZANIE

Hamiltonian oddziaływania

$$H = g_s \mu_B \frac{1}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B} = \mu_B B \sigma_{x,y}.$$

Macierze $\sigma_{x,y}$ mają wartości własne ± 1. Stąd energie odpowiadające H są równe $E = \pm \mu_B B = \pm \omega \hbar$. Odpowiednie znormalizowane wektory własne

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : \; v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\sigma_y &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} : \; v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \; v_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Funkcja falowa

$$\psi(t) = \alpha v_+ e^{-i\omega t} + \beta v_- e^{+i\omega t}.$$

Warunek początkowy w $t = 0$

$$\psi(0) = \alpha v_+ + \beta v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

w obu przypadkach daje

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zatem funkcja falowa w chwili $t > 0$ ma postać

$$\begin{aligned}
B \| x \quad &: \quad \psi(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{+i\omega t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -i \sin \omega t \end{pmatrix}, \\
B \| y \quad &: \quad \psi(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{+i\omega t} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Amplituda prawdopodobieństwa

$$\begin{aligned}
B \| x, \; L_y &= +\hbar/2 : \; A_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i) \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -i \sin \omega t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \omega t - \sin \omega t \right), \\
B \| y, \; L_x &= -\hbar/2 : \; B_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1) \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \omega t - \sin \omega t \right).
\end{aligned}$$

W obu przypadkach amplitudy są identyczne. Prawdopodobieństwo:

$$P = \frac{1}{2} \left(\cos \omega t - \sin \omega t \right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin \omega t \cos \omega t \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \sin 2\omega t \right)$$

2. Funkcja falowa cząstki o spinie 1 ma postać

$$\begin{aligned}\psi &= N(x+2z)e^{-\alpha r},\\ \psi &= N(y+2z)e^{-\alpha r},\end{aligned}$$

gdzie N oraz α są dodatnimi stałymi rzeczywistymi.

Z warunku normalizacji obliczyć N. Obliczyć średni kwadrat moment pędu w stanie ψ. Obliczyć średnie L_z w stanie ψ. Jakie są prawdopodobieństwa otrzymania w wyniku pomiarów wartości $L_z = \pm\hbar, 0$?

WSKAZÓWKA

$$Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi},\ Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta.$$

ROZWIĄZANIE

Mamy

$$\begin{aligned}x &= r\sin\theta\cos\varphi = r\sin\theta\frac{1}{2}\left(e^{+i\varphi}+e^{-i\varphi}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}(-Y_1^1+Y_1^{-1})\,r,\\ y &= r\sin\theta\sin\varphi = r\sin\theta\frac{1}{2i}\left(e^{+i\varphi}-e^{-i\varphi}\right) = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^1+Y_1^{-1})\,r,\\ z &= r\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0\,r.\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}\psi &= N\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(-Y_1^1+Y_1^{-1}+2\sqrt{2}Y_1^0)re^{-\alpha r}.\\ \psi &= N\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(iY_1^1+iY_1^{-1}+2\sqrt{2}Y_1^0)re^{-\alpha r}\end{aligned}$$

Aby obliczyć normę, podnosimy do kwadtatu i korzysyamy z faktu, że

$$\int d\Omega\, Y_1^{m*}Y_1^{m'} = \delta_{mm'}.$$

Mamy w obu przypadkach

$$1 = N^2\frac{2\pi}{3}(1+1+8)\underbrace{\int_0^\infty dr\, r^4 e^{-2\alpha r}}_{3/4\alpha^5} = N^2\frac{5\pi}{\alpha^5} \to N = \alpha^2\sqrt{\frac{\alpha}{5\pi}}.$$

Obliczmy

$$N^2\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty dr\, r^4 e^{-2\alpha r} = \frac{\alpha^5}{5\pi}\frac{2\pi}{3}\frac{3}{4\alpha^2} = \frac{1}{10}.$$

Stąd prawdopodobieństwa w obu przypadkach:

$$P_+ = P_- = \frac{1}{10},\ P_0 = \frac{8}{10}.$$

Ponieważ wszystkie f. kuliste są z $l = 1$

$$\langle L^2 \rangle_\psi = 2\hbar^2.$$

Teraz L_z:

$$\begin{aligned} L_z\psi &= \psi = N\hbar\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(-Y_1^1 - Y_1^{-1})re^{-\alpha r} \\ L_z\psi &= \psi = iN\hbar\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(Y_1^1 - Y_1^{-1})re^{-\alpha r} \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \langle L_z \rangle_\psi &= \frac{\hbar}{10}\int d\Omega(-Y_1^1 + Y_1^{-1} + 2\sqrt{2}Y_1^0)^*(-Y_1^1 - Y_1^{-1}) = 0. \\ \langle L_z \rangle_\psi &= \frac{\hbar}{10}i\int d\Omega(iY_1^1 + iY_1^{-1} + 2\sqrt{2}Y_1^0)^*(Y_1^1 - Y_1^{-1}) = 0. \end{aligned}$$

3. Cząstki $K^{+,0}$ zbudowane z następujących kwarków (u - up, d - down, s - strange) i antykwarków $K^+ = (u\bar{s})$ i $K^0 = (d\bar{s})$ tworzące dublet izospinowy

$$\left|K^+\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ \left|K^0\right\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

rozpraszają się na cząstkach $\Sigma^0 = (u\,d\,s), \Sigma^- = (d\,d\,s)$, które należą do trypletu izospinowego

$$\left|\Sigma^+\right\rangle = |1,1\rangle\,, \ \left|\Sigma^0\right\rangle = |1,0\rangle\,, \ \left|\Sigma^-\right\rangle = |1,-1\rangle\,.$$

W wyniku anihilacji antykwarku $\bar{s}$ z kwarkiem s tworzy się rezonansowy stan pośredni R złożony tylko z lekkich kwarków, który może być wzbudzonym rezonansem nukleonowym

$$|p^*\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ |n^*\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

rezonansem Δ

$$\left|\Delta^{++}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle, \ \left|\Delta^{+}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ \left|\Delta^{0}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \ \left|\Delta^{-}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle.$$

Ten stan pośredni rozpada się na zwykły nukleon

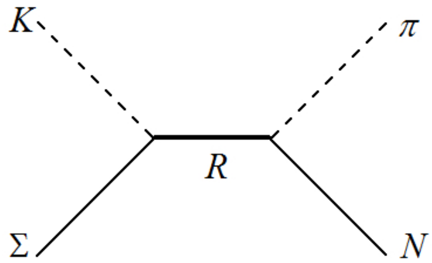
$$|p\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ |n\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

i cząstkę π

$$\left|\pi^\pm\right\rangle = |1,\pm 1\rangle\,, \ \left|\pi^0\right\rangle = |1,0\rangle\,,$$

tak jak to pokazano na rysunku. Obliczyć stosunki prawdopodobieństw zajścia następujących procesów:

$$\begin{aligned} K^+\Sigma^0 &\to R \to \pi^0 p, \\ K^+\Sigma^0 &\to R \to \pi^+ n, \\ K^+\Sigma^- &\to R \to \pi^0 n, \\ K^+\Sigma^- &\to R \to \pi^- p \end{aligned}$$



Rysunek 1: Rozpraszanie cząstki K na cząstce Σ. Amplituda jest proporcjonalna do współczynników Clebscha-Gordana opisujących złożenie cząstek stanu początkowego na stan pośredni, a następnie rozpad tego stanu pośredniego na stan końcowy.

przy założeniu, że $R = N^*$, $R = \Delta$.

Tabela współczynników Clebscha-Gordana znajduje się na odwrocie.

ROZWIĄZANIE

$$\begin{array}{cccccc}
K^+\Sigma^0 \to p^* & -\sqrt{\frac{1}{3}} & p^* \to \pi^0 p & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{9} \\
K^+\Sigma^0 \to p^* & -\sqrt{\frac{1}{3}} & p^* \to \pi^+ n & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9} \\
K^+\Sigma^- \to n^* & -\sqrt{\frac{2}{3}} & n^* \to \pi^0 n & \sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{2}{9} \\
K^+\Sigma^- \to n^* & -\sqrt{\frac{2}{3}} & n^* \to \pi^- p & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{4}{9}
\end{array}$$

oraz

$$\begin{array}{cccccc}
K^+\Sigma^0 \to \Delta^+ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \Delta^+ \to \pi^0 p & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{4}{9} \\
K^+\Sigma^0 \to \Delta^+ & \sqrt{\frac{2}{3}} & \Delta^+ \to \pi^+ n & \sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{2}{9} \\
K^+\Sigma^- \to \Delta^0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & \Delta^0 \to \pi^0 n & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{9} \\
K^+\Sigma^- \to \Delta^0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & \Delta^0 \to \pi^- p & \sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{9}
\end{array}$$

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			
.	.			
.	.			

1/2×1/2

		1
		+1
+1/2	+1/2	1

		1	0
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		1
		−1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

		3/2
		+3/2
+1	+1/2	1

		3/2	1/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

		3/2	1/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

		3/2
		−3/2
−1	−1/2	1

2×1/2

		5/2
		+5/2
+2	+1/2	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

		5/2	3/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

		5/2	3/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

		5/2
		−5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

		2
		+2
+3/2	+1/2	1

		2	1
		+1	+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

		2	1
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		2	1
		−1	−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

		2
		−2
−3/2	−1/2	1

2×1

		3
		+3
+2	+1	1

		3	2
		+2	+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

		3	2	1
		+1	+1	+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

		3	2	1
		0	0	0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1
		−1	−1	−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

		3	2
		−2	−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

		3
		−3
−2	−1	1

3/2×1

		5/2
		+5/2
+3/2	+1	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

		5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

		5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

		5/2
		−5/2
−3/2	−1	1

1×1

		2
		+2
+1	+1	1

		2	1
		+1	+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

		2	1	0
		0	0	0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

		2	1
		−1	−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

		2
		−2
−1	−1	1