

# Egzamin pisemny z mechaniki kwantowej

II termin

21.2.2022 godz. 9:00, sala A-2-01

1. Dwie cząstki A i B, każda o spinie 1 tworzą układ złożony. Spin A jest w stanie własnym  $S_z = +1$ , spin B jest w stanie własnym  $S_z = -1$  ( $\hbar = 1$ ). Obliczyć ile wynosi prawdopodobieństwo, że pomiar całkowitego spinu układu da wartość 0.

## Rozwiązanie:

Korzystamy z tabeli współczynników Clebscha-Gordana:

$$|1, 1\rangle |1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |0, 0\rangle.$$

Prawdopodobieństwo wystąpienia stanu  $|0, 0\rangle$  wynosi  $1/3$ , w związku z tym prawdopodobieństwo uzyskania w wyniku pomiaru całkowitego spinu równego 0 wynosi  $1/3$ .

2. Dwa elektrony znajdujące się w kryształce w sąsiednich węzłach sieci krystalicznej oddziałują momentami magnetycznymi (spin elektronu  $s = 1/2$ ):

$$\hat{H} = \frac{\gamma}{\hbar^2} \vec{S}^{(1)} \circ \vec{S}^{(2)}.$$

Znaleźć poziomy energetyczne i degeneracje. Następnie układ umieszczamy w polu magnetycznym  $\vec{B} = (0, 0, B)$  skierowanym wzdłuż osi  $z$ . Pełny hamiltonian opisujący taki system ma teraz postać

$$\hat{H} = \frac{\gamma}{\hbar^2} \vec{S}^{(1)} \circ \vec{S}^{(2)} + \frac{\beta}{\hbar} \vec{B} \circ (\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}).$$

Jak wygląda spektrum układu (wykres) w funkcji  $B$ , jak zmieniły się degeneracje? (Uwaga:  $\gamma, \beta > 0$ ).

## Rozwiązanie:

Mamy:

$$\vec{S}^2 = (\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)})^2 = s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{2}\hbar^2 + 2\vec{S}^{(1)} \circ \vec{S}^{(2)}$$

gdzie  $s = 0$  lub  $1$  jest całkowitym spinem. Mamy zatem

$$E_{s,m} = \frac{\gamma}{2} \left[ s(s+1) - \frac{3}{2} \right] = \begin{cases} -\frac{3}{4}\gamma & \text{dla } s = 0, m = 0, \quad \text{deg.} = 1, \\ +\frac{1}{4}\gamma & \text{dla } s = 1, m = -1, 0, +1, \quad \text{deg.} = 3. \end{cases}$$

Włączenie pola magnetycznego rozszczepia poziomy o  $m \neq 0$ :

$$E_{s,m}(B) = E_{s,m} + \beta B m.$$

3. Rozważmy bezspinową cząstkę opisaną funkcją falową

$$\psi = K(x + y + 2z)e^{-\alpha r},$$

gdzie  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  a  $K, \alpha$  to dodatnie stałe rzeczywiste.

- Ile wynosi całkowity moment pędu cząstki, czyli  $\sqrt{\langle L^2 \rangle}$ ?
- Jaka jest wartość oczekiwana  $z$ -towej składowej momentu pędu?
- Jakie jest prawdopodobieństwo, że pomiar  $L_z$  da wynik  $= +\hbar$ ?

Wskazówka:

$$Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}, Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}, Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta.$$

**Rozwiązanie:**

Funkcja falowa przepisana w zmiennych sferycznych to

$$\psi(r, \theta, \phi) = Kr(\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \theta + 2 \cos \theta)e^{-\alpha r}$$

zaś jej część kątowna to

$$\psi(\theta, \phi) = K'(\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \theta + 2 \cos \theta).$$

Używając definicji funkcji sinus i cosinus można przepisać część kątowną jako

$$\psi(\theta, \phi) = K' \left( \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \sin \theta + \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \sin \theta + 2 \cos \theta \right),$$

czyli, używając wskazówki jako

$$\psi(\theta, \phi) = K' \left( -\frac{1}{2}(1 - i)\sqrt{8\pi/3}Y_1^1 + \frac{1}{2}(1 + i)\sqrt{8\pi/3}Y_1^{-1} + 2\sqrt{4\pi/3}Y_1^0 \right)$$

Z ortonormalności funkcji kulistych można łatwo obliczyć  $K'$  ( bez całkowania), bo  $|K'|^2(\frac{1}{2}8\pi/3 + \frac{1}{2}8\pi/3 + 4 \cdot 4\pi/3) = 1$ , więc  $K' = 1/\sqrt{8\pi}$ .

Całkowity moment pędu  $\sqrt{\langle L^2 \rangle} = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$ , bo funkcja falowa odpowiada tylko  $l = 1$ .

Wartość oczekiwana  $z$ -towej składowej momentu pędu to

$$\langle L_z \rangle = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{2} \frac{8\pi}{3} (+\hbar) + \frac{1}{2} \frac{8\pi}{3} (-\hbar) + 16\pi/3 \cdot (0\hbar) \right) = 0$$

Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości  $+\hbar$  to

$$P = | \langle L_z = +\hbar | \psi(\theta, \phi) \rangle |^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{6}$$

4. Udowodnić związek rekurencyjny:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m+1 \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1-1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \\
&+ \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2-1 & | & m \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Rozwiązanie:**

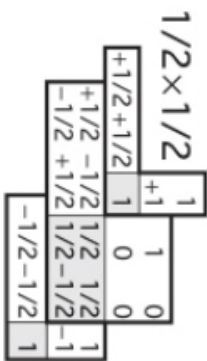
Działając operatorem  $\hat{J}_+$  na równanie

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \quad (1)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \\
&= \sum_{m_1, m_2} \left[ \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} |j_1, m_1+1\rangle |j_2, m_2\rangle \right. \\
& \left. + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2+1\rangle \right] \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \\
&= \sum_{m_1, m_2} \left[ \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1-1 & m_2 & | & m \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & | & j \\ m_1 & m_2-1 & | & m \end{pmatrix} \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

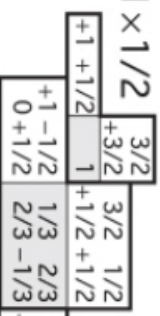
Stosujemy teraz wzór (1) ale dla stanu  $|j, m+1\rangle$  i porównujemy współczynniki przy stanach  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ .



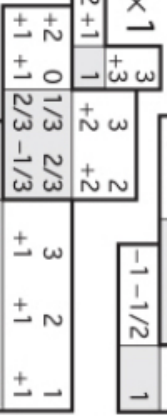
Notation:

$m_1$	$m_2$	$J$	$J$	...
$m_1$	$m_2$	$M$	$M$	...
Coefficients				

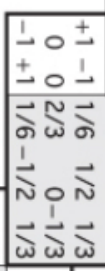
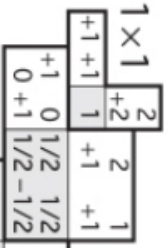
1 x 1/2



2 x 1



1 x 1



2 x 1/2



3/2 x 1/2

