Egzamin pisemny z mechaniki kwantowej

II termin

21.2.2022 godz. 9:00, sala A-2-01

1. Dwie cząstki A i B, każda o spinie 1 tworzą układ złożony. Spin A jest w stanie własnym $S_z = +1$, spin B jest w stanie własnym $S_z = -1$ ($\hbar = 1$). Obliczyć ile wynosi prawdopodobieństwo, że pomiar całkowitego spinu układu da wartość 0.

   Rozwiązanie:

   Korzystamy z tabeli współczynników Clebscha-Gordana:

   $$|1,1\rangle\,|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\,|2,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|0,0\rangle\,.$$

   Prawdopodobieństwo wystapienia stanu $|0,0\rangle$ wynosi $1/3$, w związku z tym prawdopodobieństwo uzyskania w wyniku pomiaru całkowitego spinu równego 0 wynosi $1/3$.

2. Dwa elektrony znajdujące się w krysztale w sąsiednich węzłach sieci krystalicznej oddziaływują momentami magnetycznymi (spin elektronu $s = 1/2$):

   $$\hat{H} = \frac{\gamma}{\hbar^2}\vec{S}^{(1)} \circ \vec{S}^{(2)}.$$

   Znaleźć poziomy energetyczne i degeneracje. Następnie układ umieszczamy w polu magnetycznym $\vec{B} = (0,0,B)$ skierowanym wzdłuż osi z. Pełny hamiltonian opisujący taki system ma teraz postać

   $$\hat{H} = \frac{\gamma}{\hbar^2}\vec{S}^{(1)} \circ \vec{S}^{(2)} + \frac{\beta}{\hbar}\vec{B} \circ \left(\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}\right).$$

   Jak wygląda spektrum układu (wykres) w funkcji B, jak zmieniły się degeneracje? (Uwaga: $\gamma, \beta > 0$).

   Rozwiązanie:

   Mamy:

   $$\vec{S}^2 = \left(\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}\right)^2 = s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{2}\hbar^2 + 2\,\vec{S}^{(1)} \circ \vec{S}^{(2)}$$

   gdzie $s = 0$ lub 1 jest całkowitym spinem. Mamy zatem

   $$E_{s,m} = \frac{\gamma}{2}\left[s(s+1) - \frac{3}{2}\right] = \begin{cases} -\frac{3}{4}\gamma \quad \text{dla} \quad s = 0, m = 0, \quad \text{deg.} = 1, \\ \\ +\frac{1}{4}\gamma \quad \text{dla} \quad s = 1, m = -1, 0, +1, \quad \text{deg.} = 3. \end{cases}$$

   Włączenie pola magnetycznego rozszczepia poziomy o $m \neq 0$:

   $$E_{s,m}(B) = E_{s,m} + \beta B\, m.$$

3. Rozważmy bezspinową cząstkę opisaną funkcją falową

$$\psi = K(x + y + 2z)e^{-\alpha r},$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a K, α to dodatnie stałe rzeczywiste.

- Ile wynosi całkowity moment pędu cząstki, czyli $\sqrt{< L^2 >}$?
- Jaka jest wartość oczekiwana z-towej składowej momentu pędu?
- Jakie jest prawdopodobieństwo, że pomiar L_z da wynik $= +\hbar$?
  Wskazówka:

$$Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}, Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}, Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta.$$

Rozwiązanie:

Funkcja falowa przepisana w zmiennych sferycznych to

$$\psi(r, \theta, \phi) = Kr(\cos\phi \sin\theta + \sin\phi \sin\theta + 2\cos\theta)e^{-\alpha r}$$

zaś jej część kątowa to

$$\psi(\theta, \phi) = K'(\cos\phi \sin\theta + \sin\phi \sin\theta + 2\cos\theta).$$

Używając definicji funkcji sinus i cosinus można przepisać część kątową jako

$$\psi(\theta, \phi) = K'(\frac{1}{2}(e^{\imath\phi} + e^{-i\phi}) \sin\theta + \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \sin\theta + 2\cos\theta),$$

czyli, używając wskazówki jako

$$\psi(\theta, \phi) = K'(-\frac{1}{2}(1 - i)\sqrt{8\pi/3}Y_1^1 + \frac{1}{2}(1 + i)\sqrt{8\pi/3}Y_1^{-1} + 2\sqrt{4\pi/3}Y_1^0)$$

Z ortonormalności funkcji kulistych można łatwo obliczyć K' (bez całkowania), bo $|K'|^2(\frac{1}{2}8\pi/3 + \frac{1}{2}8\pi/3 + 4 \cdot 4\pi/3) = 1$, więc $K' = 1/\sqrt{8\pi}$.

Całkowity moment pędu $\sqrt{< L^2 >} = \sqrt{l(l + 1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$, bo funkcja falowa odpowiada tylko $l = 1$.

Wartość oczekiwana zetowej składowej momentu pędu to

$$< L_z >= \frac{1}{8\pi}(\frac{1}{2}\frac{8\pi}{3}(+\hbar) + \frac{1}{2}\frac{8\pi}{3}(-\hbar) + 16\pi/3 \cdot (0\hbar)) = 0$$

Prawdopodobieństwo zmierzenia wartości $+\hbar$ to

$$P = | < L_z = +\hbar|\psi(\theta, \phi) > |^2 = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{2}\frac{8\pi}{3} = \frac{1}{6}$$

4. Udowodnić związek rekurencyjny:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{j(j+1)-m(m+1)} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m+1 \end{array} \right) \\
&= \quad \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1-1 & m_2 & m \end{array} \right) \\
&+ \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)} \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2-1 & m \end{array} \right).
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie:

Działając operatorem $\hat{J}_+$ na równanie

$$
|j,m\rangle = \sum_{m_1,m_2} |j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right) \tag{1}
$$

otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,|j,m+1\rangle \\
&= \sum_{m_1,m_2} \Big[\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1+1)}\,|j_1,m_1+1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \\
&+ \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2+1)}\,|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2+1\rangle \Big] \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{array} \right) \\
&= \sum_{m_1,m_2} \Bigg[\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}\,|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1-1 & m_2 & m \end{array} \right) \\
&+ \sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}\,|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle \left(\begin{array}{cc|c} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2-1 & m \end{array} \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{2}
$$

Stosujemy teraz wzór (1) ale dla stanu $|j,m+1\rangle$ i porównujemy współczynniki przy stanach $|j_1,m_1\rangle\,|j_2,m_2\rangle$.

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			
.	.			
.	.			

$1/2 \times 1/2$

		1
		+1
+1/2	+1/2	1

		1	0
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		1
		−1
−1/2	−1/2	1

$1 \times 1/2$

		3/2
		+3/2
+1	+1/2	1

		3/2	1/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

		3/2	1/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

		3/2
		−3/2
−1	−1/2	1

2×1

		3
		+3
+2	+1	1

		3	2
		+2	+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

		3	2	1
		+1	+1	+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

		3	2	1
		0	0	0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1
		−1	−1	−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

		3	2
		−2	−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

		3
		−3
−2	−1	1

1×1

		2
		+2
+1	+1	1

		2	1
		+1	+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

		2	1	0
		0	0	0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

		2	1
		−1	−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

		2
		−2
−1	−1	1

$3/2 \times 1$

		5/2
		+5/2
+3/2	+1	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

		5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

		5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

		5/2
		−5/2
−3/2	−1	1

$2 \times 1/2$

		5/2
		+5/2
+2	+1/2	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

		5/2	3/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

		5/2	3/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

		5/2
		−5/2
−2	−1/2	1

$3/2 \times 1/2$

		2
		+2
+3/2	+1/2	1

		2	1
		+1	+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

		2	1
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		2	1
		−1	−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

		2
		−2
−3/2	−1/2	1