

# Egzamin pisemny z mechaniki kwantowej

1.2.2022 godz. 9:00, sala A-1-13

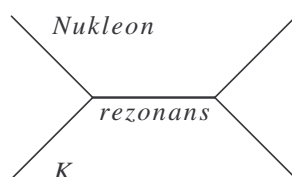
1. Rozważyć reakcje rozpraszania

$$\begin{aligned} K^- p &\rightarrow \Sigma^- \pi^+, \Sigma^+ \pi^-, \Sigma^0 \pi^0, \\ K^- n &\rightarrow \Sigma^- \pi^0, \Sigma^0 \pi^-, \end{aligned}$$

które zachodzą (wyłącznie) poprzez formacje *albo* rezonansu o izospinie (a)  $I = 1$ , *albo* (b)  $I = 0$ . Wyliczyć w obu przypadkach (*oddzielnie*) stosunki przekrojów czynnych na podane wyżej reakcje.

WSKAZÓWKA: Izospin jest wewnętrzną liczbą kwantową, odpowiadającą operatorom  $\hat{I}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) o własnościach identycznych jak w przypadku operatorów momentu pędu. Izospin jest w powyższych reakcjach zachowany, a występujące w nich cząstki mają następujące  $I$  oraz  $I_3$  ( $|I, I_3\rangle$ ):

$$\begin{aligned} K^- &= |1/2, -1/2\rangle, \quad p = |1/2, 1/2\rangle, \quad n = |1/2, -1/2\rangle \\ \Sigma^- &= |1, -1\rangle, \quad \Sigma^0 = |1, 0\rangle, \quad \Sigma^+ = |1, 1\rangle, \\ \pi^- &= |1, -1\rangle, \quad \pi^0 = |1, 0\rangle, \quad \pi^+ = |1, 1\rangle. \end{aligned}$$



**Rozwiązanie:**

$$\begin{aligned}
|K^-\rangle|p\rangle &= \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|1, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|0, 0\rangle, \\
|K^-\rangle|n\rangle &= \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = |1, -1\rangle \\
|\Sigma^-\rangle|\pi^+\rangle &= |1, -1\rangle|1, 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|2, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0, 0\rangle, \\
|\Sigma^+\rangle|\pi^-\rangle &= |1, 1\rangle|1, -1\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|2, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0, 0\rangle, \\
|\Sigma^0\rangle|\pi^0\rangle &= |1, 0\rangle|1, 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|0, 0\rangle, \\
|\Sigma^-\rangle|\pi^0\rangle &= |1, -1\rangle|1, 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|2, -1\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|1, -1\rangle, \\
|\Sigma^0\rangle|\pi^-\rangle &= |1, 0\rangle|1, -1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|2, -1\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|1, -1\rangle.
\end{aligned}$$

Stąd amplitudy na poszczególne reakcje

#	reakcja	$A_0$	$A_1$
1	$K^-p \rightarrow \Sigma^-\pi^+$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}(-)\sqrt{\frac{1}{2}}$
2	$K^-p \rightarrow \Sigma^+\pi^-$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}$
3	$K^-p \rightarrow \Sigma^0\pi^0$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}(-)\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}0$
4	$K^-n \rightarrow \Sigma^-\pi^0$	0	$1(-)\sqrt{\frac{1}{2}}$
5	$K^-n \rightarrow \Sigma^0\pi^-$	0	$1\sqrt{\frac{1}{2}}$

Stąd przekroje czynne:

$$\text{przez rez. 0 } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{1}{6} \times |A_0|^2, \quad \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \times |A_0|^2,$$

$$\text{przez rez. 1 } \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{4} \times |A_1|^2, \quad \sigma_3 = 0 \times |A_1|^2, \quad \sigma_4 = \sigma_5 = \frac{1}{2} \times |A_1|^2$$

gdzie  $A_{1,0}$  to amplitudy zależne od energii i innych liczb kwantowych.

2. Dwie jednakowe, nieoddziaływujące cząstki o masie  $m$  i spinie  $1/2$  znajdują się w jednowymiarowej, nieskończonej studni potencjału

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < x < L, \\ \infty & \text{dla } x \leq 0, L \leq x. \end{cases}$$

Znaleźć trzy najniższe poziomy energetyczne, napisać odpowiadające im funkcje falowe i wyznaczyć degenerację.

WSKAZÓWKA: Najpierw znaleźć jednocząstkowe funkcje przestrzenne i odpowiadające im energie, a potem skonstruować funkcje falowe z uwzględnieniem spinu, biorąc pod uwagę zakaz Pauliego.

**Rozwiązanie:**

Jenocząstkowe funkcje falowe mają postać:

$$\psi_n = \sqrt{2/L} \sin \frac{\pi n}{L} x,$$

a energie

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2.$$

Dwucząstkowe f. falowe konstruujemy z funkcji przestrzennych o odpowiednich własnościach symetrii

$$\begin{aligned} \psi_{nm}^A &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_n(1)\psi_m(2) - \psi_m(1)\psi_n(2)), \\ \psi_{nm}^S &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_n(1)\psi_m(2) + \psi_m(1)\psi_n(2)) \quad \text{lub} \quad \psi_n(1)\psi_n(2) \end{aligned}$$

i części spinowej

$$\begin{aligned} \chi^{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{\uparrow}(1)\chi_{\downarrow}(2) - \chi_{\downarrow}(1)\chi_{\uparrow}(2)), \\ \chi^{11} &= \chi_{\uparrow}(1)\chi_{\uparrow}(2), \quad \chi^{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{\uparrow}(1)\chi_{\downarrow}(2) + \chi_{\downarrow}(1)\chi_{\uparrow}(2)), \quad \chi^{11} = \chi_{\downarrow}(1)\chi_{\downarrow}(2), \end{aligned}$$

gdzie górne wskaźniki odnoszą się do całkowitego spinu  $s$  i  $s_3$ :  $\chi^{s s_3}$ . Funkcje falowe trzech pierwszych poziomów energetycznych  $E_{nm} = E_n + E_m$  mają postać

$$\begin{aligned} n = m = 1, \quad \psi_{11}^S \chi^{00}, \quad &\text{brak degeneracji, } E_{11} = 2E_1, \\ n = 1, m = 2, \quad \psi_{12}^S \chi^{00}, \quad \text{deg. 1, } \psi_{12}^A \chi^{1s_3}, \quad \text{deg. 3, łącznie 4, } &E_{12} = 5E_1. \\ n = m = 2, \quad \psi_{22}^S \chi^{00}, \quad &\text{brak degeneracji, } E_{22} = 8E_1. \end{aligned}$$

- Atom wodoru (pomijamy spiny elektronu i protonu), znajdujący się w stanie podstawowym, zostaje włożony pomiędzy równoległe płyty i poddany słabemu, jednorodnemu polu elektrycznemu, postaci  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha t} \theta(t)$ , gdzie  $\theta(t)$  to funkcja Heavyside'a (schodkowa). Znaleźć w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo, że atom będzie w jakimkolwiek z jego stanów  $n = 2$  po długim ( $t \gg \tau$ ) okresie czasu.

WSKAZÓWKA:

$$\begin{aligned}
 Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
 Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}, \\
 R_{10} &= 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}, \\
 R_{21} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} (r/a_0) e^{-r/(2a_0)}, \quad R_{20} = 2\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} (1 - r/(2a_0)) e^{-r/(2a_0)},
 \end{aligned}$$

gdzie  $a_0$  to promień Bohra.

**Rozwiązanie:**

Uwaga: w temacie zadania był błąd, brakowało w funkcji  $R_{10}$  czynnika 2. Poniższe rozwiązanie jest bez czynnika 2 (tak jak w temacie).

Przejście  $1s \rightarrow 2s$  jest zabronione przez parzystość ( $\langle 200|z|100 \rangle = 0$ ). Ponieważ  $z \sim Y_{10}$  (sferyczny tensor rzędu 1 o  $m = 0$ ), przejścia  $1s \rightarrow 2p$  ( $\Delta l = +1$ ) są możliwe w pierwszym rzędzie pod warunkiem, że  $\Delta m = 0$ . Energia potencjalna to  $V = -eE_0 z e^{-t/\tau}$  dla  $t > 0$ , amplituda

$$\begin{aligned}
 c^{(1)}(t) &= -(-i/\hbar) eE_0 \int_0^t dt' \langle 210|z|100 \rangle e^{(i\omega - \tau^{-1})t'} \\
 &= ieE_0/\hbar \langle 210|z|100 \rangle \frac{e^{(i\omega - 1/\tau)t} - 1}{\omega^2 + \tau^{-2}} (-i\omega - 1/\tau)
 \end{aligned}$$

Stąd prawdopodobieństwo

$$P = |c^{(1)}(t)|^2 = (eE_0/\hbar)^2 |\langle 210|z|100 \rangle|^2 \frac{1}{\omega^2 + \tau^{-2}} (1 + e^{-2t/\tau} - 2e^{-t/\tau} \cos \omega t)$$

Dla dużych czasów można zaniedbać eksponenty, więc

$$P = (eE_0/\hbar)^2 \frac{1}{\omega^2 + \tau^{-2}} |\langle 210|z|100 \rangle|^2.$$

Korzystając z podanych funkcji falowych

$$\langle 210|z|100 \rangle = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^\infty r^2 dr R_{21} Y_{10} r \cos \theta R_{10} Y_{00} = \frac{\sqrt{2^{13}}}{3^5} a_0.$$

Obliczenie całki

$$\begin{aligned}
 \langle 210|z|100 \rangle &= 2\pi \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \overbrace{\int_{-1}^1 d(\cos \theta) \cos^2 \theta}^{=2/3} \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \int_0^\infty dr r^3 (r/a_0) e^{-r/(2a_0)} e^{-r/a_0} \\
 &= \frac{1}{3} \frac{1}{2^{3/2}} a_0 \int_0^\infty d\rho \rho^4 e^{-3\rho/2} = \frac{1}{3} \frac{1}{2^{3/2}} a_0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \underbrace{\int_0^\infty dt t^4 e^{-t}}_{=4!=3 \cdot 2^3} \\
 &= \frac{\sqrt{2^{13}}}{3^5} a_0,
 \end{aligned}$$

gdzie  $\rho = r/a_0$  i  $t = 3\rho/2$ . Ostatecznie

$$P = (eE_0/\hbar)^2 \frac{a_0^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \frac{2^{13}}{3^{10}}$$

zaś

$$\omega = (E_{2p} - E_{1s})/\hbar = 3e^2/(8a_0\hbar).$$

4. Funkcja falowa cząstki rozpraszającej się na potencjale sferycznym  $V(r)$  dana jest wzorem

$$\psi(\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}'),$$

gdzie  $u_i$  jest falą padającą, za którą przyjmujemy falę płaską padającą wzdłuż osi  $z$ . Badając asymptotykę tego wyrażenia dla  $r$  dużo większego od zasięgu potencjału zdefiniować amplitudę rozpraszania, a następnie obliczyć jej jawną postać w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń (przybliżenie Borna).

**Rozwiązanie:**

$$V \rightarrow \lambda V$$

i rozwijając

$$\psi = \psi^{(0)} + \lambda\psi^{(1)} + \lambda^2\psi^{(2)} + \dots$$

Otrzymujemy wówczas rekurencję

$$\begin{aligned}
 \psi^{(0)}(\mathbf{r}) &= u_i(\mathbf{r}), \\
 \psi^{(n)}(\mathbf{r}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \psi^{(n-1)}(\mathbf{r}')
 \end{aligned}$$

co daje

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(\mathbf{r}) &= -\frac{m}{\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}') \\ \psi^{(2)}(\mathbf{r}) &= \left(\frac{m}{\pi\hbar^2}\right)^2 \int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \int d^3r'' \frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} V(\mathbf{r}'') u_i(\mathbf{r}'')\end{aligned}$$

i tak dalej. Zauważmy, że dla  $r \gg r'$  i dla zlokalizowanych potencjałów możemy użyć przybliżenia  $r \rightarrow \infty$  pod pierwszą całką po  $d\mathbf{r}'$  i rozwinąć

$$\begin{aligned}k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| &= k\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta} \\ &\simeq r\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\theta} \simeq kr - kr'\cos\theta \\ &= kr - \mathbf{k}_f \mathbf{r}',\end{aligned}$$

gdzie  $\mathbf{k}_f$  jest wektorem falowym skierowanym radialnie o długości  $k$ :

$$\mathbf{k}_f = k \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Dalej

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \frac{1}{r}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(\mathbf{r}) &= -\frac{m}{\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k}_f \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}') \times \frac{e^{ikr}}{r} \\ \psi^{(2)}(\mathbf{r}) &= \left(\frac{m}{\pi\hbar^2}\right)^2 \int d^3r' e^{-i\mathbf{k}_f \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \int d^3r'' \frac{e^{ik|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} V(\mathbf{r}'') u_i(\mathbf{r}'') \times \frac{e^{ikr}}{r}.\end{aligned}$$

Widać zatem, że ogólna postać funkcji falowej daje się zapisać jako

$$\psi(\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + A_{fi} \times \frac{e^{ikr}}{r},$$

gdzie

$$A_{fi} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' u_f^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle u_f | V | \psi \rangle$$

jest *amplitudą rozpraszania* od stanu  $i$  (zauważmy, że funkcja  $\psi$  w przypadku braku oddziaływania redukuje się do funkcji  $u_i$ ) do stanu  $f$ . Amplituda ma wymiar długości i nie zależy od  $r$  a tylko od kątów (poprzez  $\mathbf{k}_f$ ). Podstawiając za  $\psi$  kolejne przybliżenia otrzymujemy kolejne przybliżenia dla amplitudy rozpraszania. W pierwszym rzędzie dostajemy tzw. *przybliżenie Borna*:

$$\begin{aligned}A_{fi} &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' u_f^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i(\mathbf{k}_f-\mathbf{k}_i)\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}').\end{aligned}$$