Mechanika Kwantowa III rok

zestaw 7 na dzień 1.12.2014. poniedziałek 14:15

sala A-2-01 nowy kampus

1. System 2 cząstek o kręcie 1/2 opisywany jest hamiltonianem

$$H = A\frac{1}{\hbar}\left(S_z^{(1)} + S_z^{(2)}\right) + B\frac{1}{\hbar^2}\vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)}.$$

Znaleźć wszystkie poziomy energetyczne takiego systemu.

WSKAZÓWKA:

Przejść do bazy całkowitego spinu $\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$ i korzystając z faktu, że $\vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\vec{S}^2 - \left(\vec{S}^{(1)}\right)^2 - \left(\vec{S}^{(2)}\right)^2\right]$ znaleźć wartości własne $\vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)}$. Alternatywnie można rozpisać operator $\vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)}$ za pomocą składowych $S_{\pm,3}^{(1,2)}$ i skostruować H jako macierz w przestrzeni $|1/2, m_1\rangle\,|1/2, m_2\rangle$ i następnie tę macierz zdiagonalizować.

2. System złożony z 2 elektronów związanych w krysztale opisywany jest jedynie przez ich spiny. Hamiltonian oddziaływania ma postać

$$H = -J(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)})$$

gdzie $\sigma_i^{(1,2)}$ są macierzami Pauliego, które związane są z operatorami połówkowego spinu $\vec{s}^{(1,2)} = \hbar/2\,\vec{\sigma}^{(1,2)}$. Ile poziomów energetycznych ma ten system? Znaleźć odpowiadające im energie i degeneracje.

Opisany wyżej system zostaje umieszczony w polu magnetycznym $\vec{B}$ skierowanym wzdłuż osi z. Hamiltonian oddziaływania ma teraz postać

$$H = -J(\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}) - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

gdzie moment magnetyczny układu obu elektronów dany jest wzorem

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{mc}\vec{s} = -\frac{e}{mc}(\vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)})$$

gdzie $-e$ i m są odpowiedno ładunkiem i masą elektronu. Jak zmieniają się poziomy energetyczne układu w funkcji B_z?

3. Rozważmy reakcje ropraszania cząstek π na nukleonie:

$$\begin{aligned} \pi^+ p &\to \pi^+ p \\ \pi^- p &\to \pi^- p \\ \pi^- p &\to \pi^0 n \end{aligned}$$

Cząstki π stanowią triplet izospinowy

$$\left|\pi^\pm\right\rangle = |1, \pm 1\rangle\,,\ \left|\pi^0\right\rangle = |1, 0\rangle$$

natomiast nukleon dublet

$$|p\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ |n\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Izospin jest liczbą kwantową o własościach – jeśli chodzi o składanie – takich jak moment pędu. Jest on zachowany w oddziaływaniach silnych odpowiedzialnych za podane wyżej reakcje. Stany numerujemy wartością t całkowitego izospinu i t_3:

$$|t, t_3\rangle .$$

Rozpraszanie π-nukleon może zachodzić porzez uformowanie stanu pośredniego zwanego rezonansem.

Może to być rezonans Δ:

$$\left|\Delta^{++}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle, \ \left|\Delta^{+}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ \left|\Delta^{0}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \ \left|\Delta^{-}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$$

lub rezonans N^*

$$|p^*\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \ |n^*\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Obliczyć stosunki przekrojów czynnych na podane wyżej reakcje przyjmując, że zachodzą one albo poprzez uformowanie rezonansu Δ albo N^*.

WSKAZÓWKA: Mając dany stan początkowy w powyższych reakcjach, zastanowić się, jak wygląda amplituda prawdopodobieństwa otrzymania stanu pośredniego, a następnie otrzymania danego stanu końcowego. Przekrój czynny jest proporcjonalny do kwadratu amplitudy. Odpowiednie współczynniki Clebscha-Gordana odczytać z tablic.

Zestaw 8 na dzień 4.12.2014. czwartek 10:15 sala D-2.02

1. Rozważmy nienaładowaną cząstkę o spinie 1/2, o momencie magnetycznym

$$\vec{\mu} = -2\mu_B \frac{1}{\hbar}\vec{S}$$

($\vec{S}$ jest operatorem spinu), która porusza się w nieskończonej studni potencjału $-L \leq x \leq L$. W części studni o $x \leq 0$ włączono pole magnetyczne skierowane wzdłuż osi z: $\vec{B}_I = (0, 0, B)$, zaś w drugiej części dla $x \geq 0$ pole skierowane wzdłuż osi x: $B_{II} = (B, 0, 0)$. Zakładając, że pole B jest słabe wyliczyć energie w rachunku zaburzeń.

WSKAZÓWKA: Najpierw trzeba wyliczyć poziomy i f. falowe bez pola. Przydatna całka

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x.$$

2. Przedyskutować efekt Starka w atomie wodoru dla $n = 2$ gdzie zaburzenie ma postać.

$$H' = eErn_z.$$

Wykazać, że energia zależy od jednego niezerowego elementu macierzowego

$$H'_{13} = h = eE \int d^3r \ \psi_1^* r n_z \psi_3,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{l=0,m=0}^{n=2} = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) Y_0^0(\theta, \varphi), \\ \psi_3 &= \psi_{l=1,m=0}^{n=2} = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r}{a_0} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right) Y_1^0(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

Wyliczyć h.

3. Przedyskutować jakościowo efekt Starka dla $n = 3$ gdzie zaburzenie ma postać.

$$H' = eErn_z$$

Skorzystać z tw. Eckarta-Wignera w celu znalezienia niezerowych elementów macierzy H' która w bazie funkcji falowych stanu $n = 3$ jest macierzą 9×9. Znaleźć relacje między tymi elementami nie licząc całek radialnych. Funkcje falowe dla $n = 3$ są np. w podręczniku Dawydowa str. 145 lub w G.K. Woodgate „Struktura atomu" str.32. Wyliczyć poprawki do energii w funkcji 2 całek radialnych.