Mechanika Kwantowa III rok

zestaw 4 na dzień 27.10.2014. poniedziałek 14:15

sala A-2-01 nowy kampus

1. Dokończenie. Korzystając z podanych na wykładzie reguł działania operatorów $J_\pm$

$$J_\pm |j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j, m\pm 1\rangle$$

skonstruować reprezentację macierzową operatorów krętu dla $j = 1$. Otrzymane macierze różnią się od tych z zad. 5. z poprzedniego zestawu. Znaleźć transformację unitarną łączącą macierze z obu zadań.

Na poprzednich ćwiczeniach skonstruowaliśmy macierz D diagonalizującą macierz

$$J_3 = -i\hbar\varepsilon_{3ij} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tzn.

$$D^\dagger J_3 D = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

która miała postać

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Jednak ta macierz D nie przeprowadzała macierzy $J_{1,2}$ do postaci z początku tego zadania. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że wystarczy w macierzy D zmienić znak pierwszej kolumny, aby otrzymać prawidłową postać macierzy $J_{1,2}$. Sprawdzić, że ta zmiana nie wpływa na postać J_3.

2. Macierz obrotu wokół osi z ma postać

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zapisać w analogiczny sposób macierz obrotu wokół osi x i y. Rozwinąć następnie te macierze w szereg dla małych kątów obrotu i wyznaczyć w ten sposób generatory grupy obrotów.

3. Obliczyć złożenie obrotów wokół osi x i y w dwóch różnych kolejnościach rozwijając macierze obrotu do drugiego rzędu i obliczyć różnicę. Powiązać otrzymany wynik z regułami komutacji operatorów krętu.

4. Zadanie 4 z poprzedniego zestawu.

5. Obliczyć antykomutator macierzy Pauliego: $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$.

6. Obliczyć iloczyn
$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})\ (\vec{b} \cdot \vec{\sigma}),$$
gdzie $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są dowolnymi wektorami.

7. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć tzw. małą macierz Wignera
$$d^{1/2}_{mm'}(\beta) = \langle 1/2, m|\, e^{-i\beta J_y/\hbar}\, |1/2, m'\rangle$$