Mechanika Kwantowa III rok

zestaw 1 na dzień 6.10.2014. poniedziałek 14:15

sala A-2-01 nowy kampus

1. Proszę rozważyć radialne równanie Schrödingera w potencjale $V(r) = 0$ dla energii $E = \hbar^2 k^2/(2m) > 0$ przyjmując, że funkcja falowa separuje się na część kątową i radialną
$$\psi_{klm}(\vec{r}) = R_{kl}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$
Dla cząstki swobodnej gdy potencjał znika, równanie to jest znane jako zmodyfikowane równanie Bessela. Rozwiązać to równanie dla $l = 0$ definiując nową funkcję $u(r) = r\, R_{k0}(r)$.

   Aby rozwiązać to równanie dla $l \neq 0$ należy

   - zdefiniować $\chi_{kl}(r) = R_{kl}(r)/r^l$ i wyprowadzić równanie na $\chi_{kl}(r)$,
   - zróżniczkować to równanie po r,
   - zdefiniować nową funkcję $f_{kl}(r) = r\, \chi'_{kl}(r)$,
   - porównać równanie na f_{kl} z wyjściowym równaniem na χ_{kl} i zgadnąć wzór rekurencyjny łączący χ_{kl+1} z χ_{kl},
   - rozwiązać rekurencję i znaleźć $R_{kl}(r)$ dla $l = 1, 2$, etc.,
   - znaleźć asymptotykę $R_{kl}(r)$ dla dużych r,
   - startując z wyjściowego równania na $R_{kl}(r)$ znaleźć zachowanie w zerze.

2. Korzystając z wyników poprzedniego zadania znaleźć poziomy energetyczne nieskończonej radialnej studni potencjału:
$$V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \infty & R < r \end{cases}.$$
Uwaga, rozwiązania dla kilku najniższych poziomów proszę znaleźć numerycznie.

3. Cząstka o masie m porusza sę w potencjale centralnym
$$V(r) = C \ln(r/r_0).$$
   - Wykazać, że wszystkie stany własne zcharakteryzowane są tą samą średnią prędkością. Wyliczyć tę prędkość.
   - Wykazać, że odległości pomiędzy poziomami są niezależne od wartości masy m.