# 31 Równanie Diraka

## 31.1 Równanie Kleina-Gordona dla cząstki swobodnej

Równanie Schrödingera jest w rzeczywistości operatorowym zapisem klasycznego związku

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{31.1}$$

gdzie pęd i energię zatępujemy operatorami

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla},\ E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{31.2}$$

Najprostsze uogóleninie tej procedury na przypadek relatywistyczny, polega na użyciu (31.2) we wzorze relatywistycznym

$$E^2 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4, \tag{31.3}$$

co daje równanie zwane dziś równaniem Kleina-Gordona

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \left(-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^{\,2} + m^2c^4\right)\varphi. \tag{31.4}$$

Równanie to dopuszcza rozwiązania w postaci fali płaskiej

$$\varphi = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{31.5}$$

gdzie

$$E = \hbar\omega = \pm\sqrt{\hbar^2c^2k^2 + m^2c^4} \tag{31.6}$$

Jak widać pojawiają się rozwiązania o ujemnej energii, których interpretacja nie jest jasna (antycząstki).

Wyprowadźmy teraz równanie ciągłości (poprzez analogię do równania Schrödingera). W przypadku nierelatywistycznym mieliśmy

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0 \tag{31.7}$$

gdzie

$$P = \psi^*\psi,\ \vec{S} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\,\vec{\nabla}\psi - \psi\,\vec{\nabla}\psi^*\right) \tag{31.8}$$

Odejmijmy stronami równania

$$\begin{aligned} -\hbar^2\varphi^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi &= \varphi^*\left(-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^{\,2} + m^2c^4\right)\varphi \\ -\hbar^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^* &= \varphi\left(-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^{\,2} + m^2c^4\right)\varphi^* \end{aligned} \tag{31.9}$$

$$\left[\varphi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi - \varphi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi^*\right] = c^2\left[\varphi^*\vec{\nabla}^2\varphi - \varphi\vec{\nabla}^2\varphi^*\right]. \tag{31.10}$$

Przepisując te równania jako

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right] = c^2\vec{\nabla}\left[\varphi^*\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\varphi^*\right] \tag{31.11}$$

widzimy, że gęstość prądu jest identuczna jak w przypadku nierelatywisycznym

$$\vec{S} = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\varphi^*\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\varphi^*\right] \tag{31.12}$$

natomiast odpowiednik gęstości prawdopodobieństwa jest wówczas dany jako

$$P = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left[\varphi^* \frac{\partial}{\partial t}\varphi - \varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^*\right]. \tag{31.13}$$

Tak zdefiniowane $P$ nie jest dodatnio określone, nie można go więc zinterpretować jako gęstości prawdopodobieństwa (po pomnożeniu przez $e$ możnaby jako gęstość ładunku). Jest to zwiazane z tym, że równanie (31.4) jest drugieo rzędu w pochodnych po czasie.

## 31.2 Równanie Diraka dla cząstki swobodnej

Dirac zaproponował użycie związku liniowego, kosztem wprowadzenia niekomutujących, bezwymiarowych obiektów $\vec{\alpha}$ i $\beta$ (macierze):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\psi. \tag{31.14}$$

Podnosząc (opweratorowo) równanie (31.14) do kwadratu powiniśmy dostać równanie (31.4):

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\left(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta mc^2\right)\psi. \tag{31.15}$$

Rozpiszmy prawą stronę

$$\begin{aligned} & c^2\alpha_i\alpha_j p_i p_j + mc^3\left(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j\right) + m^2c^4\beta^2 \\ &= c^2\frac{1}{2}\left(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i\right)p_i p_j + mc^3\left(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j\right) + m^2c^4\beta^2. \end{aligned} \tag{31.16}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że operator $p_i p_j$ jest symetryczny w indeksach $ij$. Porównując z (31.4) lub z (31.3) mamy

$$\begin{aligned} (\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) &= 2\delta_{ij}, \\ (\alpha_i\beta + \beta\alpha_j) &= 0, \\ \beta^2 &= 1. \end{aligned} \tag{31.17}$$

Znalezienie rozwiązań równań (31.17) dyskutowane jest w literaturze, tu podamy jedynie ostateczne rozwiązanie. Okazuje się, że najniższy możliwy wymiar macierzy $\alpha_i$ i $\beta$ jest 4 i mają one postać

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}, \; \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{31.18}$$

gdzie $\sigma_i$ są macierazmi Pauliego:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \; \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{31.19}$$

Sprawdźmy

$$\begin{aligned}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{31.20}$$

Pamiętając, że

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{31.21}$$

dostajemy pierwszą z równości (31.17). Z kolei

$$\begin{aligned}(\alpha_i\beta + \beta\alpha_j) &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} = 0.\end{aligned} \tag{31.22}$$

Wreszcie

$$\beta^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1. \tag{31.23}$$

Oczywiście wybór (31.18) nie jest jednoznaczny. Macierze unitarne równoważne

$$\alpha_i' = U^\dagger \alpha_i U, \; \beta' = U^\dagger \beta U \tag{31.24}$$

także spełniają związki (31.17). Reprezentację macierzy $\alpha_i$ i $\beta$ daną wzorami (31.18) nazywamy reprezentacją Bjorkena.

Mamy zatem równanie liniowe w pochodnej czasowej, ale funkcja falowa jest czterowyniarowym spinorem. Rozwiązanie swobodnego równania Diraka zapisujemy w postaci fali płaskiej

$$\psi(t, \vec{r}) = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)/\hbar} u \tag{31.25}$$

gdzie $u$ jest czterowymiarowym (wektorem) spinorem

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \tag{31.26}$$

Po podstawieni fali płaskiej mamy równanie na $u$ (kładąc $c = 1$)

$$\begin{bmatrix} E-m & 0 & -p_z & -(p_x - ip_y) \\ 0 & E-m & -(p_x+ip_y) & p_z \\ -p_z & -(p_x-ip_y) & E+m & 0 \\ -(p_x+ip_y) & p_z & 0 & E+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = 0. \tag{31.27}$$

Warunkiem istnienia rozwiązań jest znikanie wyznacznika, który jest równy

$$\left(E^2 - \vec{p}^2 - m^2\right)^2 = 0. \tag{31.28}$$

Czyli mamy

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \tag{31.29}$$

Dla dodatniego pierwiastka istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania, które przyjmuje się w postaci

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_+ + m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E_+ + m} \end{bmatrix}, \; u^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E_+ + m} \\ -\frac{p_z}{E_+ + m} \end{bmatrix}. \tag{31.30}$$

Dla ujemnej energii mamy

$$u^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{p_z}{E_- - m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E_- - m} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; u^{(4)} = \begin{bmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E_- - m} \\ -\frac{p_z}{E_- - m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{31.31}$$

Sprawdźmy pierwsze rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} E-m & 0 & -p_z & -(p_x - ip_y) \\ 0 & E-m & -(p_x+ip_y) & p_z \\ -p_z & -(p_x-ip_y) & E+m & 0 \\ -(p_x+ip_y) & p_z & 0 & E+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E_+ + m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E_+ + m} \end{bmatrix}.$$

Po kolei:

$$\begin{aligned} E_+ - m - \frac{-p_z^2 - p_x^2 - p_z^2}{E_+ + m} &= \frac{1}{E_+ + m}(E_+^2 - m^2 - \vec{p}^2) = 0 \\ -\frac{p_z}{E_+ + m}(p_x + ip_y) + p_z \frac{p_x + ip_y}{E_+ + m} &= 0, \\ -p_z + (E_+ + m)\,\frac{p_z}{E_+ + m} &= 0, \\ -(p_x + ip_y) + (E_+ + m)\,\frac{p_x + ip_y}{E_+ + m} &= 0. \end{aligned}$$

Dla pozostałych rozwiązań rachunki przebiegają podobnie. Pouczające jest sparwdzić warunek ortogonalności między rozwiązaniami o dodatniej i ujemnej energii. Na przykład

$$u^{(3)\dagger}u^{(1)} = \left[\tfrac{p_z}{E_- - m} \;\; \tfrac{p_x - ip_y}{E_- - m} \;\; 1 \;\; 0\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E_+ + m} \\ -\frac{p_z}{E_+ + m} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{p_x - ip_y}{E_- - m} + \frac{p_x - ip_y}{E_+ + m} = 0. \tag{31.32}$$

Otrzymaliśmy zero gdyż $E_- = -E_+$.

Rozwiazania (31.30) i (31.31) można unormować

$$u^{(i)} \to \frac{1}{\sqrt{1 + \vec{p}^2/(E_+ + m)^2}}. \tag{31.33}$$

Łatwo przekonać się, że równanie ciągłośvi jest spełnione i że mamy

$$P = \psi^\dagger\psi, \; \vec{S} = c\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi. \tag{31.34}$$

Aby do końca zrozumieć znaczenie fizyczne rozwiązań (31.30) i (31.31) zdefinujmy operator spinu

$$\vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}. \tag{31.35}$$

Działając tym operatorem na rozwiąznia "w spoczynku": $\vec{p} = 0$ otrzymujemy, że $u^{(1,3)}$ odpowiadają rozwiązaniom o $s_3 = +\hbar/2$ a rozwiązania $u^{(2,4)}$ mają $s_3 = -\hbar/2$. Pojawienie się spinu jest konsekwencją niezmienniczości relatywistycznej.

Antycząstki, teoria dziur.

## 31.3 Oddziaływanie z polem elektromagnetycznym

Oddziaływanie z zewnętrznym polem elektromagnetycznym wprowadzamy stosując *zasadę minimlnego sprzężnia*

$$\begin{aligned} c\vec{p} &\to c\vec{p} - q\vec{A}, \\ E &\to E - qV. \end{aligned} \tag{31.36}$$

Równanie Diraka przyjmuje wówczas postać:

$$\Big((E - qV) - \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A}) - \beta mc^2\Big)\psi = 0. \tag{31.37}$$

Mnożąc równanie (31.37) przez

$$\Big((E - qV) + \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p} - q\vec{A}) + \beta mc^2\Big)$$

dostajemy

$$
\begin{aligned}
D^2 &= \Big((E-qV)+\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})+\beta mc^2\Big)\Big((E-qV)-\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})-\beta mc^2\Big) \\
&= (E-qV)^2 - m^2c^4 - \Big(\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})\Big)^2 \\
&- (E-qV)\ \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A}) + \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})\ (E-qV)\,.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że człony $\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})\beta mc^2$ oraz $(E-qV)\,\beta mc^2$ kasują się.

Wyliczmy drugi człon postaci

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{a}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{b}.$$

Ponieważ

$$\alpha_i\alpha_j = \frac{1}{2}\{\alpha_i,\alpha_j\} + \frac{1}{2}[\alpha_i,\alpha_j] = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\Sigma_k. \tag{31.38}$$

Stąd

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{a}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{\Sigma}. \tag{31.39}$$

Mamy więc

$$\Big(\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})\Big)^2 = (c\vec{p}-q\vec{A})^2 + (c\vec{p}-q\vec{A})\times(c\vec{p}-q\vec{A})\cdot\vec{\Sigma}. \tag{31.40}$$

Drugi człon nie znika

$$(c\vec{p}-q\vec{A})\times(c\vec{p}-q\vec{A}) = -qc\left(\vec{A}\times\vec{p}+\vec{p}\times\vec{A}\right) = i\hbar qc\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = i\hbar qc\vec{B}, \tag{31.41}$$

gdzie $\vec{B}$ jest polem magnetycznym. Stąd

$$-\Big(\vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})\Big)^2 = -(c\vec{p}-q\vec{A})^2 + \hbar qc\,\vec{B}\cdot\vec{\Sigma}. \tag{31.42}$$

Z kolei

$$
\begin{aligned}
&- (E-qV)\ \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A}) + \vec{\alpha}\cdot(c\vec{p}-q\vec{A})\ (E-qV) \\
&= q\,\vec{\alpha}\cdot\left(E\vec{A}-\vec{A}E\right) + qc\,\vec{\alpha}\cdot(V\vec{p}-\vec{p}V) \\
&= iq\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}V\right) = -iq\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{E},
\end{aligned} \tag{31.43}
$$

gdzie wektor $\vec{E}$ (w odróznieniu od energii $E$) oznacza pole elektryczne:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}V.$$

Wreszcie dokonamy przybliżenia nierelatywistycznego definiując energię *nierelatywistyczną* $E'$

$$E = E' + mc^2, \tag{31.44}$$

gdzie człon $mc^2$ uważamy za duży. Wówczas

$$\begin{aligned}(E-qV)^2-m^2c^4 &= \left(E'+mc^2-qV\right)^2-m^2c^4\\ &= (E'-qV)^2+2mc^2\,(E'-qV)\,.\end{aligned} \tag{31.45}$$

Zaniedbując pierwszy człon, mamy

$$D^2 = 2mc^2\,(E'-qV)-(c\vec{p}-q\vec{A})^2+\hbar qc\,\vec{B}\cdot\vec{\Sigma}-iq\hbar c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{E} \tag{31.46}$$

i w konsekwencji równanie Diraka możemy zapisać jako

$$\left(\frac{1}{2mc}(\vec{p}-\frac{q}{c}\vec{A})^2+qV-\frac{\hbar q}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{\Sigma}+\frac{iq\hbar}{2mc}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{E}\right)\psi = E'\psi. \tag{31.47}$$

Pierwsze dwa człony w równaniu (31.47) odpowiadają hmiltonianowi cząstki bezspinowej w polu elektromagnetycznym $(V,\vec{A})$. Drugi człon (dla $q=-e$) ma postać

$$-\frac{\hbar q}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{\Sigma} = 2\frac{e\hbar}{2mc}\frac{1}{\hbar}\vec{S}\cdot\vec{B} = g_s\mu_B\frac{1}{\hbar}\vec{S}\cdot\vec{B}, \tag{31.48}$$

gdzie operator spinu ma postać

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}.$$

Hamiltonian (31.48) pokrywa się z wcześniej wprowadzonym hamiltonianem Pauliego, z tym że otrzymaliśmy wynik

$$g_s = 2. \tag{31.49}$$

Ostatni człon $\vec{\alpha}\cdot\vec{E}$ zawiera tylko elementy pozadigonalne, a więc miesza górne składowe bispinora Diraka z dolnymi, które są małe, rzędu $(v/c)$ i możemy je zaniedbać.

Systematyczne rozwinięcie równania Diraka w potęgi $(v/c)$ nosi nazwę transformcji Foldy-Wouthuyusen'a i wykracza poza zakres tego wykładu.

## 31.4 Kowariantna postać równania Diraka

Wyprowadziliśmy

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p}-\beta mc^2\right)\psi = 0,$$

gdzie

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{31.50}$$

Mnożąc stronami przez $\beta$ otrzymuemy

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}-c\,\vec{\gamma}\cdot\vec{p}-mc^2\right)\psi = 0, \tag{31.51}$$

gdzie

$$\gamma^0 = \beta,\ \gamma^i = \beta\alpha_i = \left[ \begin{array}{cc} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{array} \right].$$

Równanie to możemy więc zapisać w jenostkach naturalnych $c = \hbar = 1$ w formie

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,\psi = 0, \tag{31.52}$$

gdzie

$$p^\mu = (p^0 = i\partial_t, \vec{p} = -i\vec{\nabla})$$

Warto pamiętać, że dla tensora metrycznego

$$g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) \tag{31.53}$$

mamy

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^\mu g_{\mu\nu} p^\nu = \gamma^0 p^0 - \gamma^i p^i.$$