18 Ruch w polu magnetycznym

18.1 Poziomy Landaua

Dotychczas omówiliśmy dość szczegółowo oddziaływanie cząstki naładowanej z zewnętrznym polem elektrycznym (atom wodoru). Aby opisać także ruch w polu magnetycznym, musimy skwantować odpowiedni hamiltonian klasyczny

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + qV(\vec{r},t), \tag{18.1}$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki, zaś c prędkością światła. Przypomnijmy, że pola elektryczne i magnetyczne wyrażają się przez potencjały w następujący sposób:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}V, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{18.2}$$

O ile część elektryczna nie przedstawia problemów, to część zawierająca potencjał wektorowy $\vec{A}$ nie daje się prosto skwantować, gdyż potencjał $\vec{A}$ jest funkcją $\vec{r}$, a $\vec{r}$ nie komutuje z operatorem pędu.

Jako przykład rozpatrzmy ruch elektronu w stałym polu magnetycznym $\vec{B} = (0, 0, B)$. Wygodnie przyjąć potencjał wektorowy w postaci:

$$\vec{A} = B\begin{bmatrix} -y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18.3}$$

Stąd

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m_e}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 = \frac{1}{2m_e}\left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB}{c}y\right)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right] \\ &= \frac{1}{2m_e}\hat{p}_x^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_z^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_y^2 + \frac{m_e}{2}\left(\frac{qB}{m_e c}\right)^2 y^2 + \frac{qB}{m_e c}y\hat{p}_x. \end{aligned} \tag{18.4}$$

Tu separację zmiennych przeprowadzamy zakładając

$$\psi(x,y,z) = f(y)e^{-ip_x x/\hbar}e^{-ip_z z/\hbar}. \tag{18.5}$$

Podstawiając funkcję (**??**) do równania Schrödingera możemy zastąpić operatory $\hat{p}_z$ i $\hat{p}_x$ przez wartości własne. Oznaczając

$$\tilde{\omega} = \frac{qB}{m_e c} = 2\omega \tag{18.6}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m_e}p_z^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_y^2 + \frac{m_e}{2}\tilde{\omega}^2 y^2 + \tilde{\omega}yp_x + \frac{1}{2m_e}p_x^2 \\ &= \frac{1}{2m_e}p_z^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_y^2 + \frac{m_e}{2}\tilde{\omega}^2\left(y^2 + 2\frac{p_x}{m_e\tilde{\omega}}y + \frac{1}{m_e^2\tilde{\omega}^2}p_x^2\right). \end{aligned} \tag{18.7}$$

Zmieniając zmienne

$$\eta = y + \frac{p_x}{m_e\tilde{\omega}} \tag{18.8}$$

otrzymujemy

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e}p_z^2 + \frac{1}{2m_e}\hat{p}_\eta^2 + \frac{m_e}{2}\tilde{\omega}^2\eta^2. \tag{18.9}$$

Jest to hamiltonian oscylatora o częstości $\tilde{\omega}$ (plus ruch swobodny w kierunku z):

$$\begin{aligned} E_{N,p_z} &= \hbar\tilde{\omega}\left(N+\frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m_e} \\ &= \hbar\omega\,(2N+1) + \frac{p_z^2}{2m_e}. \end{aligned} \tag{18.10}$$

Zwróćmy uwagę, że poziomy te są nieskończenie razy zdegenerowane ze względu na p_x.

Inna metoda znalezienia energii poziomów Landaua opiera się na uzyciu innego cechowania:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}B\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{18.11}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m_e}\left[\left(\hat{p}_x + \frac{qB}{2c}y\right)^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{qB}{2c}x\right)^2 + \hat{p}_z^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\hbar\tilde{\omega}\left[\frac{\left(\hat{p}_x + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}y\right)^2}{m_e\hbar\tilde{\omega}} + \frac{\left(\hat{p}_x - \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}x\right)^2}{m_e\hbar\tilde{\omega}}\right] + \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}. \end{aligned} \tag{18.12}$$

Definiując nowe operatory

$$\hat{\pi}_x = \frac{\hat{p}_x + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}y}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}},\ \hat{\pi}_y = \frac{\hat{p}_y - \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}x}{\sqrt{m_e\hbar\tilde{\omega}}}, \tag{18.13}$$

mamy

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\tilde{\omega}\left[\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2\right] + \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}. \tag{18.14}$$

Zbadajmy komutator

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = \frac{1}{m_e\hbar\tilde{\omega}}\left\{-\frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}\,[\hat{p}_x, x] + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}\,[y, \hat{p}_y]\right\} = i. \tag{18.15}$$

Widzimy zatem, że relacja komutacji $[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y]$ przypomina (z dokładnością do $\hbar$) relację komutacji między położeniem a pędem. Skonstruujmy nowe operatory

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y\right),\ \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y\right), \tag{18.16}$$

których relacja komutacji jest w rzeczywistości relacją komutacji operatorów kreacji i anihilacji:

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \frac{i}{2}\left\{-\left[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\right] + \left[\hat{\pi}_y, \hat{\pi}_x\right]\right\} = 1. \tag{18.17}$$

Z kolei

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2}\left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2 + i\left[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\right]\right) = \left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2 - 1\right), \tag{18.18}$$

czyli

$$\frac{1}{2}\left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2\right) = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}. \tag{18.19}$$

Zatem

$$\hat{H} = \hbar\tilde{\omega}\left[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right] + \frac{\hat{p}_z^2}{2m_e}. \tag{18.20}$$

Dostajemy stąd, że energia poziomów Landaua

$$E = \hbar\frac{\tilde{\omega}}{2}(2n+1) + \frac{p_z^2}{2m_e} \tag{18.21}$$

w zgodzie z (**??**). Zgodnie z naszymi poprzednimi rozważaniami, poziomy Landaua są nieskończenie zdegenerowane. Aby się przekonać, że w cechowaniu (**??**) mamy także do czynienia z nieskończoną degeneracją, zapiszmy operator anihilacji $\hat{a}$ w reprezentacji położeń:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2m_e\hbar\tilde{\omega}}}\left\{\hat{p}_x + \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}y + i\left(\hat{p}_y - \frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}x\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m_e\hbar\tilde{\omega}}}\left\{-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) - i\frac{1}{2}m_e\tilde{\omega}(x+iy)\right\}. \end{aligned} \tag{18.22}$$

W reprezentacji położeń stan podstawowy spełnia równanie

$$\hat{a}\langle\vec{r}\,|\,0\rangle = 0, \tag{18.23}$$

co jest równoważne równaniu różniczkowemu

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{m_e\tilde{\omega}}{2\hbar}(x+iy)\right\}\langle\vec{r}\,|\,0\rangle = 0. \tag{18.24}$$

Wielkość $\hbar/m_e\omega$ ma wymiar kwadratu długości i ma sens kwadratu promienia klasycznej orbity elektronu w ruchu w polu magnetycznym $\vec{B}$. Oznaczmy:

$$r_B^2 = \frac{\hbar}{m_e\tilde{\omega}}. \tag{18.25}$$

Wprowadźmy nowe zmienne

$$u = x + iy,\ v = x - iy.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{18.26}$$

i równanie (**??**) przyjmuje postać

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{4r_B^2}u\right)\langle\vec{r}\,|\,0\rangle = 0. \tag{18.27}$$

Rozwiącanie tego równania jest bardzo proste

$$\langle\vec{r}\,|\,0\rangle = f(u)e^{-\frac{uv}{4r_B^2}}, \tag{18.28}$$

gdzie $f(u)$ jest dowolną funkcją spełniającą warunek normalizacji. Zatem rzeczywiście stan podstawowy jest nieskończnie zdegenerowany. Łatwo pokazać, że stany wzbudzone, które otrzymujemy działając na stan podstawowy operatorem

$$\hat{a}^\dagger = -i\frac{r_B}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{4r_B^2}v\right) \tag{18.29}$$

nie znosi tej degeneracji.