Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa I, zestaw 13

27.1.2014. poniedziałek, godz. 14:15

sala 001B

1. W chwili $t = 0$ funkcja falowa atomu wodoru jest następującą kombinacją funkcji własnych energii

$$\psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(2\psi^1_{0,0}(\vec{r}) + \psi^2_{1,0}(\vec{r}) + \sqrt{2}\psi^2_{1,1}(\vec{r}) + \sqrt{3}\psi^2_{1,-1}(\vec{r}) \right)$$

(w notacji $\psi^n_{l,m}$).

   (a) Jak ten stan ewoluuje w czasie?

   (b) Obliczyć wartość oczekiwaną energii w tym stanie.

   (c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w chwili $t > 0$, atom jest w stanie $l = 1$ i $m = 1$ (n dowolne).

   (d) Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia w chwili $t = 0$ elektronu w odległości mniejszej niż $R = 10^{-10}$ cm od jądra. Odpowiednie całki po dr można przybliżyć używając rozwinięcia kwadratu funkcji falowej w parametrze R/a.

2. Klasycznie rozpraszaniu ulegają tylko cząstki, które padają na sztywną (nieskończoną) kulę w odległości nie większej niż a od osi z przebiegającej przez środek kuli. Takie cząstki mają maksymalny moment pędu $L \sim pa$ czyli $l \sim ka$. Spróbujmy we wzorze na przekrój czynny

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k)$$

wysumować wszystkie fale parcjalne od $l = 0$ do $l = ka$. W tym celu przyjąć, że $\delta_{l+1} = \delta_l - \pi/2$ (dlaczego?). Wykazać, że w takim przybliżeniu $\sigma \sim 2\pi a^2$.

3. Cząstka o energii $E \to 0$ rozprasza się na potencjale

$$V = \begin{cases} -V_0 & \text{dla} \quad 0 \leq r \leq a \\ \\ 0 & \text{dla} \quad a < r \end{cases},$$

gdzie V_0 jest dodatnią stałą. Wyprowadzić równanie na δ_0 i rozwiązać go dla $E \to 0$. Wyprowadzić warunek wiążący V_0 i a przy którym całkowity przekrój czynny w fali s znika w granicy $E \to 0$.

4. Wykazać, że wyrażenie na przekrój czynny dla $l = 0$ z poprzedniego zadania ma bieguny rezonanasowe, tzn. że dla energii $k \to 0$ przekrój czynny może być nieskończony dla pewnych parametrów studni V. Znaleźć związek między V_0 a a, dla których to zachodzi i wykazać, że jest to dokładnie związek, który otrzymujemy z warunku, aby w potencjale V był stan zwiazany o energii równej 0.