GRUPY 1 i 2

Zadania (III) z mechaniki kwantowej na poniedziałek/wtorek, 21/22 października 2013.

1. Korzystając z analogonu wzoru de Moivre'a obliczyć małą macierz Wignera

$$d^{1/2}_{mm'}(\beta) = \langle 1/2, m| e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y} |1/2, m'\rangle \tag{1}$$

Wsk. Obliczyć $(\vec{\sigma}.\vec{a})(\vec{\sigma}.\vec{b})$ gdzie $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są dowolnymi wektorami klasycznymi. Zastosować szczególny przypadek tego wzoru.
2. Macierz obrotu o kąt α dookoła osi Oz ma postać

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Skonstruować analogiczne macierze obrotu wokół osi Oy i Oz. Obliczyć $R_x(\epsilon), R_y(\epsilon)$ i $R_z(\epsilon)$, dla nieskończenie małych obrotów, z dokładnością do drugiego rzędu. Obliczyć różnicę między zlożeniami takich obrotów dookoła osi Ox i Oy w dwóch różnych kolejnościach. Czy ta różnica jest związana z obrotem dookoła osi Oz, jak? Powiązać otrzymany wynik z regułami komutacji operatorów krętu.
3. Wykorzystując formułę
$J_\pm|j, m >= \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m{\pm}1 >$, obliczyć jawną postać macierzy trzech generatorów J_x, J_y i J_z w reprezentacji stanów własnych krętu z $j = 1$. **3a.** Porównać tak otrzymane macierze $J_{x,y,x}$ z macierzami tych samych generatorów, w bazie kartezjańskiej, obliczonymi bezpośrednio z macierzy nieskończenie małych obrotów $R_x(\epsilon), R_y(\epsilon)$ i $R_z(\epsilon)$.
UWAGA: współrzędne biegunowe dowolnego wektora, $V_{\pm,0}$, dane są przez

$$V_+ = \frac{-1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y), \tag{3}$$
$$V_0 = V_z, \tag{4}$$
$$V_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y). \tag{5}$$

Zad.4 Obliczyć małą macierz Wignera $d^1_{m,m'}$ rozszerzając uogólnienie wzoru de Moivre'a z zad. 1 na macierz $(J^y)_{mm'}$ w reprezentacji z $j = 1$. *Wsk.* Obliczyć kilka pierwszych potęg $J^y_{mm'}$ i wykorzystać zaobserwowaną regularność.

J. Wosiek