Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa I, zestaw 1

8.10.2013. poniedziałek, godz. 14:15

sala 001B

1. Obliczyć we spółrzędnych sferycznych składowe operatora krętu:

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

oraz
$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2.$$

2. Operatory momentu pędu zdefiniowane są jako

$$\hat{L}_i = (\hat{r}\times\hat{p})_i \text{ gdzie } i = 1,2,3 \text{ (lub alternatywnie } x,y,z)$$

Wyliczyć komutator
$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right].$$

Operator Casimra zdefiniowany jest jako suma kwadratów

$$\hat{L}^2 = \sum_{i=1}^{3}\hat{L}_i^2.$$

Obliczyć komutator
$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}^2\right].$$

3. Definiujemy operatory
$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2.$$

Wyliczyć komutatory:
$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-], \quad [\hat{L}_\pm, \hat{L}_3].$$

Wykazać, że
$$\hat{L}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_3^2 + \hat{L}_3 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_3^2 - \hat{L}_3.$$

4. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że macierze

$$T_i = \frac{\hbar}{2}\tau_i,$$

gdzie τ_i są macierzami Pauliego spełniają reguły komutacji wyliczone dla operatorów $\hat{L}_i$ z poprzedniego zadania. Obliczyć operator Casimira $\sum\hat{T}_i^2$.

5. Powtórzyć obliczenia z zad. 4 dla macierzy

$$\left(\hat{J}_k\right)_{lm} = -i\hbar\varepsilon_{klm},$$

gdzie ε_{klm} jest całkowicie antysymetrycznym tensorem Levi-Civity. Proszę zwrócić uwagę, że indeks k w definicji $\hat{J}_k$ numeruje daną macierz 3×3, natomiast indeksy lm numerują wiersze i kolumny tej macierzy

6. We współrzędnych sferycznych operator $\hat{L}_z = -i\hbar\,\partial/\partial\varphi$, gdzie φ jest kątem azymutalnym. Jest to analogiczna postać, jak dla operatora pędu w jednym wymiarze (trzeba zastąpić φ przez x), co sugeruje, że dla średniego odchylenia kwadratowego $\left\langle \Delta\hat{L}_z^2 \right\rangle$ i $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$ zachodzi relacja nieoznaczoności. Jednakże nieoznaczoność kąta φ nie może być większa niż π, a więc pojawia się sprzeczność. Jak ją rozwiązać?