Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa I, zestaw 4

19.3.2013. wtorek, godz. 8:30

sala -001

1. Wykazać, że

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} dk\, e^{ikx}. \tag{1}$$

2. Pokazać, że

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{1}{|f'(x_i)|}\, \delta(x_i)$$

gdzie punkty x_i są zerami funkcji $f(x)$. Zastosować powyższe twierdzenie do

$$\delta(x^2 - \alpha^2).$$

3. Zamiast funkcji falowej $\psi(x)$ używać można funkcje zdefiniowane przez transformatę Fouriera:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\psi}(k) e^{ikx}. \tag{2}$$

Korzystając ze wzoru (1) obliczyć ze wzoru (2) odwrotną transformatę Fouriera (tj. wyrazić funkcję $\tilde{\psi}(k)$ poprzez $\psi(x)$).

Jaką postać przyjmują operatory $\hat{p}$ oraz $\hat{x}$, jeśli działają na funkcję $\tilde{\psi}(k)$? O funkcjach $\psi(x)$ i $\tilde{\psi}(k)$ mówimy, że stanowią odpowiednio reprezentację położeniową i pędową stanu $|\psi\rangle$.

4. W reprezentacji położeniowej element macierzowy operatora $\hat{O}$ daje się zapisać jako

$$\langle\varphi|\, \hat{O}\, |\psi\rangle = \int dx\, \varphi^*(x) \left[\hat{O}\psi(x)\right].$$

Sprzężenie hermitowskie operatora $\hat{O}$ oznaczamy $\hat{O}^\dagger$ i definiujemy jako

$$\langle\varphi|\, \hat{O}^\dagger\, |\psi\rangle^* = \langle\psi|\, \hat{O}\, |\varphi\rangle\,.$$

Wykazać, że lewa strona tej równości daje się zapisać

$$\langle\varphi|\, \hat{O}^\dagger\, |\psi\rangle^* = \int dx\, \left[\hat{O}^\dagger\psi(x)\right]^*\, \varphi(x).$$

Jeżeli zachodzi $\hat{O} = \hat{O}^\dagger$ to operator nazywamy hermitowskim. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem czy operatory

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx},\ \hat{x} = x,\ \frac{d}{dx},\ \hat{L}_i = (\hat{r}\times\hat{p})_i$$

są hermitowskie. Dla operatora momentu pędu $\hat{L}_i$ należy zamienić $dx \to d^3r$.

5. Udowodnić, że iloczyn operatorów hermitowskich jest operatorem hermitowskim.

http://th-www.if.uj.edu.pl/~michal/