Mechanika Kwantowa - kurs duży

grupa I, zestaw 3

12.3.2013. wtorek, godz. 8:30

sala -001

1. Obliczyć całkę Hopfa
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{iax^2},\ a > 0 \tag{1}$$
całkując po konturze C w płaszczyźnie zespolonej. Kontur C wybrać w taki sposób aby całka (1) zamieniła się w całkę $\int dt\, e^{-bt^2}$ z dodatnim b i rzeczywistym t.

2. Dystrybucję ("funkcję") delta Diraca można zdefiniować jako granicę ciągu funkcyjnego $f_\varepsilon(x)$
$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x).$$
Dystrybucja ta ma własność
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(x) \overset{\mathrm{df}}{=} f(0).$$
Wykazać, że następujące ciągi funkcyjne zdążają w granicy do $\delta(x)$:
$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},\ f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right).$$
Analogicznie wykazać, że
$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} dk\, e^{ikx}. \tag{2}$$
We wszystkich przypadkach wykonać wykresy funkcji $f_\varepsilon(x)$ dla kilku wartości ε.

3. Wykazać, że funkcja Θ daje się zapisać jako całka
$$\Theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega + i\varepsilon}e^{-i\omega\tau}.$$
Korzystając z tej reprezentacji całkowej wykazać, że
$$\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau).$$

4. Pokazać, że

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{1}{|f'(x_i)|}\, \delta(x_i)$$

gdzie punkty x_i są zerami funkcji $f(x)$. Zastosować powyższe twierdzenie do

$$\delta(x^2 - \alpha^2).$$

5. Zamiast funkcji falowej $\psi(x)$ używać można funkcje zdefiniowane przez transformatę Fouriera:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\psi}(k) e^{ikx}. \tag{3}$$

Korzystając ze wzoru (2) obliczyć ze wzoru (3) odwrotną transformatę Fouriera (tj. wyrazić funkcję $\tilde{\psi}(k)$ poprzez $\psi(x)$).

Jaką postać przyjmują operatory $\hat{p}$ oraz $\hat{x}$, jeśli działają na funkcję $\tilde{\psi}(k)$?

http://th-www.if.uj.edu.pl/~michal/