GRUPA 2

Zadania (I) z mechaniki kwantowej na środę, 3 października 2012.

1. Funkcje falowe elektronu w polu kulombowskim upraszczają się dla $l = n - 1$:

$$\begin{aligned} \psi_{n,n-1,m}(\vec{r}) &= a^{-3/2} N_{n,n-1}(2n-1)! x^{n-1} e^{-x/2} Y^m_{n-1}(\theta, \phi) \\ N_{n,l} &= \frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{((n+l)!)^3}}, \quad x = \frac{2r}{na} \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $a = \hbar^2/(me^2)$ jest promieniem Bohra.

1aWyprowadzić to wyrażenie korzystając z ogólnego wzoru na $\psi_{n,n-1,m}(\vec{r})$ podanego na wykładzie oraz z następującej funkcji tworzącej dla wielomianów Laguerra $L^k_p(z)$

$$\Sigma_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{(p+k)!} L^k_p(z) = \frac{\exp\left(-zt/(1-t)\right)}{(1-t)^{k+1}} \tag{2}$$

Wsk. Rozważyć granicę $t \to 0$.

1b Obliczyć $< r >, < r^2 >$ w tym stanie dla dowolnego n. Wsk. całki po r wykonać różniczkując po parametrze.

1c Pokazać, że $\Delta r / < r >$ dąży do zera z $n \to \infty$ (jak szybko ?). Zinterpretować ten wynik z punktu widzenia granicy klasycznej.

2. Znaleźć widmo i funkcje własne czastki kwantowej odbijającej się elastycznie, w ziemskim polu grawitacyjnym, od plaskiej poziomej płyty. Pokazać, że taka sytuacja jest opisywana jednowymiarowym potencjałem liniowym na półosi rzeczywistej.

$$V(z) = \begin{cases} \sigma z, & \text{dla} \quad 0 < z \\ \infty & \text{dla} \quad z < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Rozwiązać odpowiednie równanie Schrödingera (Landau \$ 24). Jednak w naszym przypadku energie są skwantowane. Warunek kwantyzacji ma postać $\psi(z = 0) = 0$ (dlaczego ?), gdzie $\psi(z) = AAi(\zeta(z))$ są funkcjami Airy'ego z problemu Landaua. ζ jest naturalną zmienną bezwymiarową w tym zagadnieniu. Wyznaczyć numerycznie (Mathematica) kilka najniższych energii. Porównać te liczby z wynikami analitycznymi dla wysokich poziomów, które można uzyskać ze znanych postaci asymptotycznych zer funkcji Bessela. Funkcje Airy'ego wyrażają sie przez funkcje Bessela (Landau, uzupelnienie matematyczne (b)).

2a. Wyznaczyć te same energie własne używając przybliżenia WKB.

J. Wosiek