Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 13

29.5.2012. wtorek, godz. 8:15, sala 128, grupa I
30.5.2012. środa, godz. 8:15, sala na antresoli, grupa III

1. Na poprzednich ćwiczeniach wykazaliśmy, że stan koherentny ma postać

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle .$$

Wyliczyć średnie $\hat{x}$ i $\hat{p}$ w stanie koherentnym i średnie odchylenia kwadratowe. Sprawdzić zasadę nieoznaczoności.

2. Wykazać, że stan koherentny jest proporcjonalny do stanu

$$|z\rangle \sim \exp(za^\dagger) |0\rangle .$$

Znaleźć współczynnik proporcjonalności.

3. Wykazać, że stan koherentny

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{1}$$

który zapisaliśmy jako

$$|z\rangle \sim \exp(za^\dagger) |0\rangle$$

można też zapisać jako

$$|z\rangle \sim \exp\left(i\frac{\bar{p}\,\hat{x}}{\hbar}\right) \exp\left(-i\frac{\bar{x}\,\hat{p}}{\hbar}\right) |0\rangle ,$$

gdzie $\bar{x}$ i $\bar{p}$ są wartościami średnimi z zad.1. z poprzedniego zestawu. Skorzystać dwukrotnie ze wzoru Bakera-Hausdorffa

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}.$$

Do rozwiązania tego zadania przyda się też znajomość stanu

$$e^{\alpha\hat{a}} |0\rangle = ?$$

4. Obraz Heisenberga. Dla oscylatora harmonicznego wyprowadzić jawne wzory na zależność od czasu $\hat{x}_H(t)$ i $\hat{p}_H(t)$. W tym celu obliczyć komutator hamiltonianu z operatorami kreacji i anihilacji wyprowadzając w ten sposób równania ruchu dla $\hat{a}_H(t)$ oraz $\hat{a}^\dagger_H(t)$i dalej dla $\hat{x}_H(t)$ i $\hat{p}_H(t)$. Rozwiązać te równania i porównać z ruchem klasycznym (Messiah, XII.9).

5. Znaleźć zależność od czasu stanu $|z\rangle$ zadanego wzorem (1). W tym celu podstawić zależność czasową stanów $|n\rangle$. Czy stan $|z(t)\rangle$ jest nadal stanem koherentnym?