Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 9

24.4.2012. wtorek, godz. 8:15, sala 128, grupa I
25.4.2012. środa, godz. 8:15, sala na antresoli, grupa III

1. Rozważmy jednowymiarową studnię potencjału $(V_0, a > 0)$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & a < x \end{cases} .$$

Z lewej strony nadlatuje na potencjał cząstka (fala płaska) o masie m i dodatniej energii E. Jakie jest prawdopodobieństwo przejścia przez potencjał? Kiedy jest ono równe jedności?

2. Rozważyć potencjał z poprzedniego zadania z $V_0 < 0$ (bariera potencjału). Wyliczyć prawdopodobieństwo przejścia rozważając dwa przypadki $0 < E < |V_0|$ oraz $E > |V_0|$.

3. Równanie na wielomiany Hermite'a ma postać:

$$H_n'' - 2\xi H_n' + 2nH_n = 0. \tag{1}$$

Tzw. *funkcja tworząca* dla wielomianów Hermite'a, $F(\xi, u)$, jest zdfiniowana w następujący sposób:

$$F(\xi, u) = \exp\left(-u^2 + 2\xi u\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} H_n(\xi). \tag{2}$$

Wyazać, że rzeczywiście występuące w rozwinięciu (2) współczynniki $H_n(\xi)$ spełniają równanie (1). W tym celu należy zróżniczkować definicję (2) po du lub po $d\xi$ i wyprowadzić użyteczne związki

$$\begin{aligned} H_n' &= 2nH_{n-1}, \\ H_{n+1} &= 2\xi H_n - 2nH_{n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

z których już łatwo wykazać (1).

4. Wykonując całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, F(\xi, u)\, F(\xi, w) e^{-\xi^2}$$

wyprowadzić warunek normalizacyjny dla wielomianów Hermite'a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, H_m(\xi)\, H_n(\xi)\, e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi} 2^n n!\, \delta_{nm}\,.$$