Mechanika Kwantowa - kurs duży

zestaw 5

27.3.2012. wtorek, godz. 8:15, sala 128, grupa I
28.3.2012. środa, godz. 8:15, sala na antresoli, grupa III

1. Sprawdzić bezpośrednim rachunkiem czy operatory

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx},\ \hat{x} = x,\ \ \hat{L}_i = (\hat{r} \times \hat{p})_i$$

są hermitowskie. Dla operatora momentu pędu $\hat{L}_i$ należy zamienić $dx \to d^3r$.

2. Dystrybucję ("funkcję") delta Diraca można zdefiniować jako granicę ciągu funkcyjnego $f_\varepsilon(x)$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x).$$

Dystrybucja ta ma własność

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(x) \stackrel{\text{df}}{=} f(0).$$

Wykazać, że następujące ciągi funkcyjne zdążają w granicy do $\delta(x)$:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},\ f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right).$$

Analogicznie wykazać, że

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} dk\, e^{ikx}. \tag{1}$$

We wszystkich przypadkach wykonać wykresy funkcji $f_\varepsilon(x)$ dla kilku wartości ε.

3. Zamiast funkcji falowej $\psi(x)$ używać można funkcje zdefiniowane przez transformatę Fouriera:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\psi}(k)e^{ikx}. \tag{2}$$

Korzystając ze wzoru (1) obliczyć ze wzoru (2) odwrotną transformatę Fouriera (tj. wyrazić funkcję $\tilde{\psi}(k)$ poprzez $\psi(x)$).

Jaką postać przyjmują operatory $\hat{p}$ oraz $\hat{x}$, jeśli działają na funkcję $\tilde{\psi}(k)$? W tym celu skorzystać z warunku

$$(\phi, \hat{O}\psi) = (\tilde{\phi}, \hat{O}\tilde{\psi}).$$

W równości tej $\hat{O}$ jest operatorem pędu lub położenia, ale jego jawna postać jest po obu stronach równości inna. Iloczyn skalarny jest zdefiniowany

$$(\phi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi^*(x)\, \psi(x),$$

natomiast postać iloczynu dla funkcji z wężykiem należy wyprowadzić korzystając z (2).

4. Wykazać, że funkcja Θ daje się zapisać jako całka

$$\Theta(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega\tau}.$$

Korzystając z tej reprezentacji całkowej wykazać, że

$$\frac{d\Theta(\tau)}{d\tau} = \delta(\tau).$$

5. Pokazać, że

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{1}{|f'(x_i)|}\, \delta(x_i)$$

gdzie punkty x_i są zerami funkcji $f(x)$. Zastosować powyższe twierdzenie do

$$\delta(x^2 - \alpha^2).$$